

DISPENSA no. 2: Approfondimento al capitolo 5: *Dietro la curva della domanda: l'equilibrio del consumatore.*

Approfondimento 2.0

La somma orizzontale delle curve di domanda (da inserire a p. 125, dopo il paragrafo “la curva di domanda”)

La somma orizzontale delle curve di domanda significa che ad ogni dato prezzo devono essere sommate le quantità di ciascuna domanda individuale.

Un esempio può aiutare a chiarire come si effettua la somma: supponiamo che nel mercato di un bene x ci siano solo due consumatori che domandano il bene. La domanda del primo consumatore (**D1**) e la domanda del secondo consumatore (**D2**) sono rappresentate dai grafici seguenti.

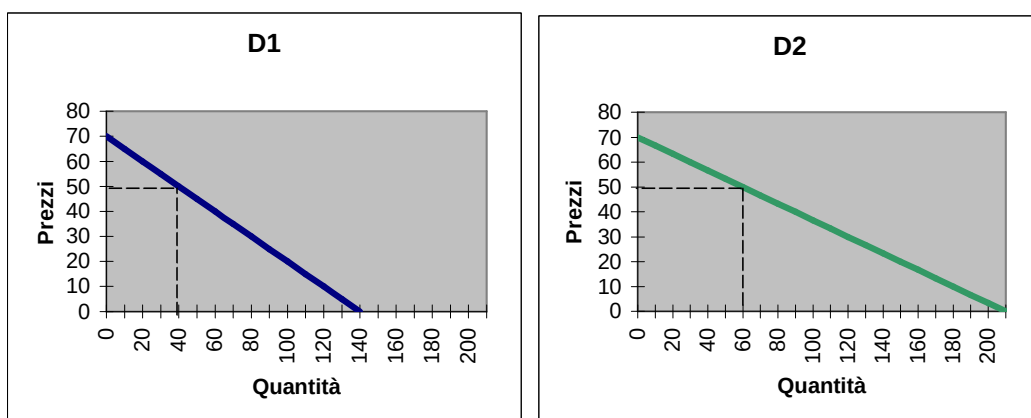


Figura A.2.01

La somma orizzontale delle curve è realizzata, calcolando per ciascun prezzo, la somma delle quantità domandate dal primo consumatore e dal secondo. Ad esempio, al prezzo di 50, per la **D1** si ha una domanda di 40 unità e per la **D2** si ha una domanda di 60 unità. Di conseguenza la domanda di mercato quando il prezzo del bene è 50 sarà pari a 100 unità.

Il grafico della domanda di mercato è dunque il seguente

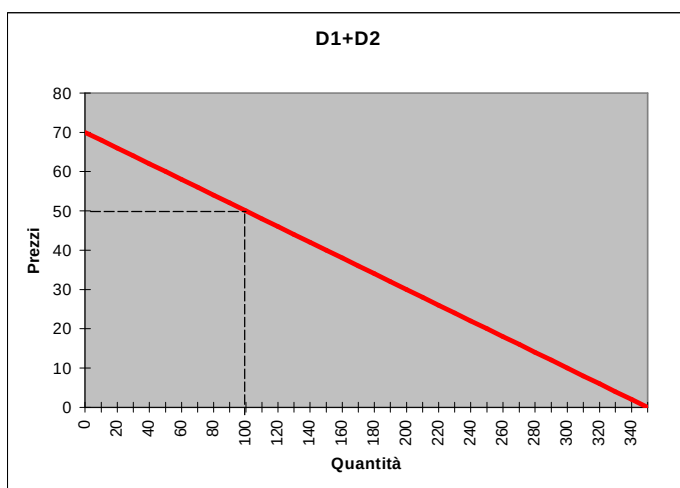


Figura A.2.02

Dal punto di vista algebrico l'equazione della **D1** è $p=70-1/2Q^1$ e quella della **D2** è $p=70-1/3Q^2$. Se sommassimo le due equazioni così come sono scritte otterremmo la somma dei prezzi anziché quella delle quantità. Per sommare orizzontalmente le due curve occorre quindi ricordarsi di esprimere le quantità in funzione dei prezzi: $Q^1=140-2p$ e $Q^2=210-3p$. A questo punto si può ottenere la curva della domanda di mercato sommando le due equazioni (lo stesso procedimento si deve seguire anche per sommare 3, 4, ..n equazioni di domanda individuale). Otteniamo quindi $Q=350-5p$ Esprimendo nuovamente i prezzi in funzione delle quantità otteniamo l'equazione della curva rappresentata nella precedente figura A.202: $p=70-1/5Q$.

Una situazione leggermente più complessa si verificherebbe se ci trovassimo con curve di domanda di questo genere:

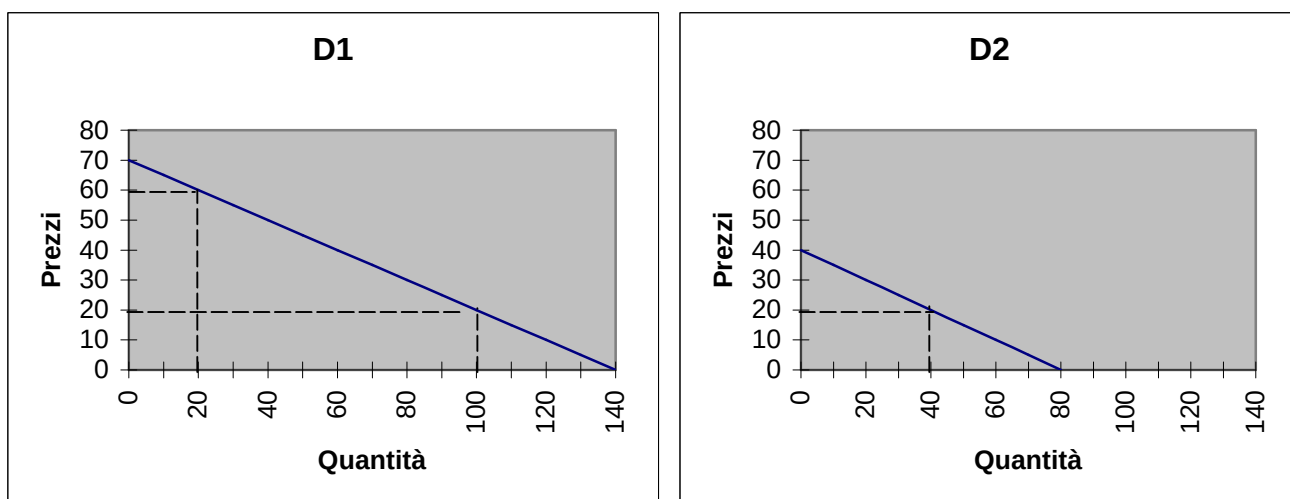


Figura A.2.03

Le due curve non hanno uguale intercetta con l'asse delle ordinate. La domanda **D1** è infatti positiva per tutti i prezzi inferiori a 70, mentre la domanda **D2** è positiva solo per i prezzi inferiori a 40. La somma orizzontale delle curve presenta quindi un angolo in corrispondenza del prezzo di 40 e della quantità di 60, poiché nel tratto in cui il prezzo è maggiore di 40 e la quantità minore di 60 il bene è richiesto solo dal primo consumatore e solo per prezzi inferiori le quantità domandate dai due consumatori si sommano.

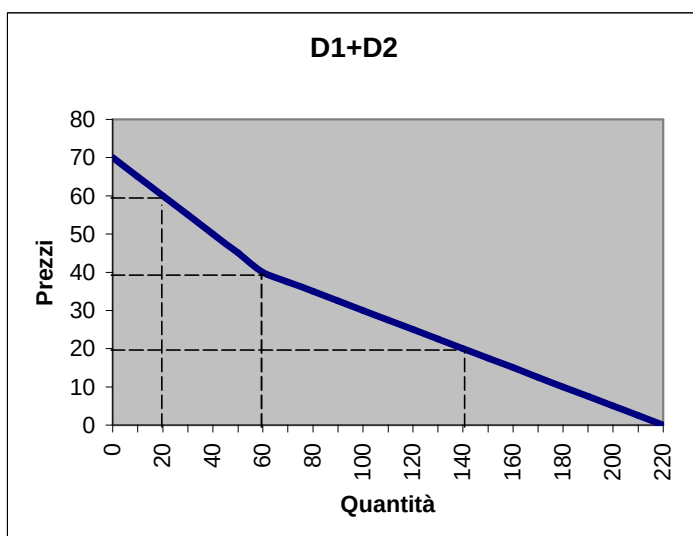


Figura A.2.04

In particolare al prezzo di 60, la quantità domandata è pari a 20, come nel grafico relativo alla **D1**. Solo in corrispondenza dei prezzi che vanno da 40 a 0 le due curve si sommano. Ad esempio, al prezzo di 20 la quantità domandata è pari a 140, cioè a 100 (**D1**) più 40 (**D2**).

Dal punto di vista algebrico, le equazioni delle due curve sono: $p=70-1/2Q_1$ e $p=40-1/2Q_2$. Esprimendo le due equazioni in funzione dei prezzi abbiamo: $Q_1=140-2p$ e $Q_2=80-2p$. Sommando le quantità si ottiene la seguente funzione: $Q=220-4p$. Tuttavia questa equazione è valida solo per i prezzi che vanno da 40 a 0. Per prezzi superiori a 40 resta invece valida l'equazione **D1**: $Q_1=140-2p$. Per tornare all'equazione della curva rappresentata nel grafico, esprimiamo le quantità in funzione dei prezzi: $p=55-1/4Q$. Anche qui bisogna però fare attenzione, perché la curva ha un angolo. Per le quantità da 0 a 60 continua quindi, anche per la domanda di mercato, a valere la funzione **D1**: $p=70-1/2Q_1$, mentre solo per le quantità **superiori a 60** vale la nuova equazione ottenuta sommando le quantità. Quando la curva di domanda ha un angolo, cioè è rappresentata da due segmenti di retta differenti, due equazioni rappresentano la curva di domanda, ciascuna relativa ad un segmento, cioè ad una serie determinata di prezzi e quantità.

Approfondimento 2.1

Il surplus del consumatore (da inserire alla fine di pagina 126)

Riassumendo quanto abbiamo già detto a proposito del surplus del consumatore, in termini geometrici, la disponibilità a pagare per consumare una certa quantità di un bene non è altro che l'area al di sotto della curva di domanda fino a quella quantità.

Questa superficie è chiamata beneficio complessivo del consumatore derivante dal consumo del bene.

Sottraendo la somma spesa dal consumatore per acquistare il bene, otteniamo il surplus (netto) del consumatore.

Quando la curva di domanda è una retta, è possibile calcolare sia il beneficio complessivo del consumatore, sia il suo surplus in modo semplice. Supponiamo che in un mercato qualsiasi la curva di domanda sia data dall'equazione $Q^d=40-2p$. Sia il prezzo prevalente nel mercato pari a € 10. La quantità scambiata è quindi 20 unità (esprese in migliaia).

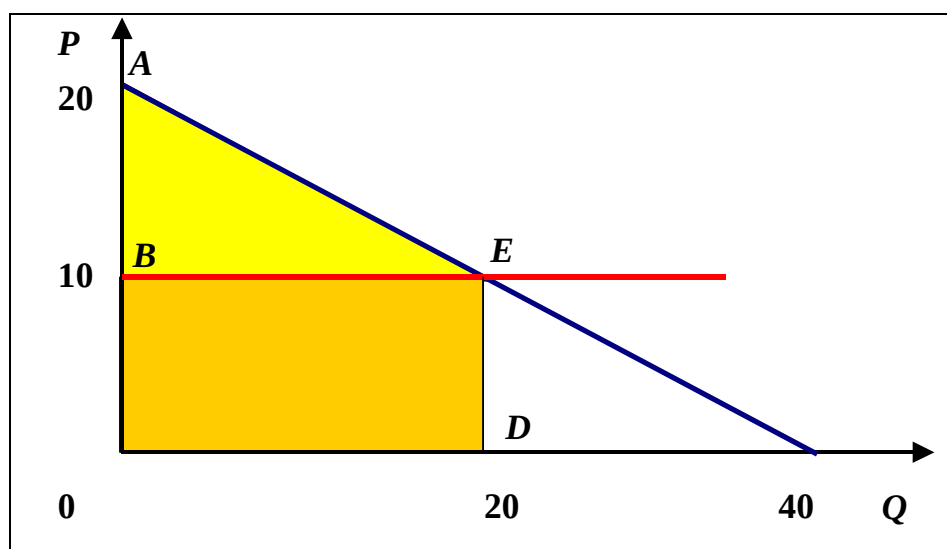


Figura A2.1.1

L'equazione "rovesciata" è

$$p=20-\frac{1}{2}Q$$

Quest'ultima è l'equazione della retta così come disegnata nel grafico. Il beneficio lordo dei consumatori, misurato in moneta, è l'area del trapezio colorato ($\frac{(20+10) \cdot 20}{2}$) ed è pari a € 300.000. Ma i consumatori, per acquistare le 20.000 unità del bene, non hanno speso € 300.000, ma soltanto la somma rappresentata in figura dall'area del rettangolo al di sotto della retta orizzontale del prezzo (prezzo x quantità), pari a € 200.000. La differenza è il beneficio netto che i consumatori ottengono dall'acquisto del bene, cioè il loro surplus pari a € 100.000 è calcolabile direttamente: si tratta infatti dell'area del triangolo ABE ($[(20 \times (20-10))/2]$).

In molte occasioni può essere importante calcolare la perdita o il guadagno del benessere dei consumatori collegato ad una misura che fa variare il prezzo e la quantità dei beni scambiati sul mercato.

Supponiamo per esempio che il bene rappresentato nel grafico A1 sia un indumento importato dalla Cina. Supponiamo che la vendita di questo bene sia ristretta da un provvedimento di politica economica, per mezzo di un *contingente all'importazione*, che impone un massimo di importazione di 16.000 unità. La limitazione della quantità scambiata fa aumentare il prezzo del bene: risolvendo la relativa equazione si trova che il prezzo di domanda è ora pari a € 12. Senza il contingente, invece, si sarebbero vendute 20.000 unità del bene al prezzo unitario di € 10.

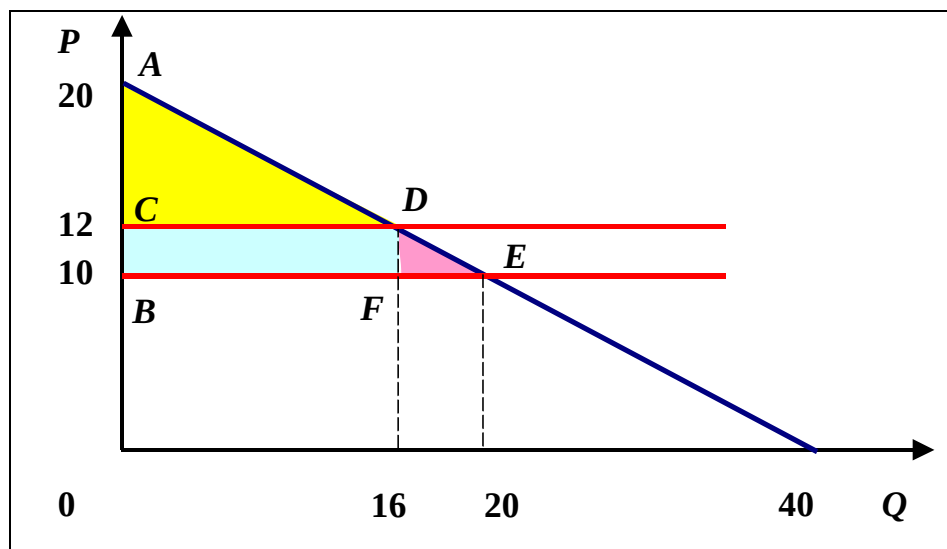


Figura A.2.1.2

Il surplus dei consumatori è, dopo l'aumento del prezzo, pari al triangolo *ACD* nella figura A.2.1.2 ed è pari a € 64.000 $[16 \times (20 - 12) / 2]$. La perdita di surplus dei consumatori derivante dalla misura di contingentamento è quindi pari a $100.000 - 64.000 = € 36.000$ ed è rappresentata dall'area del trapezio *CDEB* $[(20 + 16) \times (12 - 10) / 2]$ nella figura A.2. Ci si può chiedere se questa parte del precedente surplus dei consumatori sia andata del tutto perduta in termini di benefici. In effetti, sulle 16.000 unità vendute, i produttori realizzano un profitto maggiore, dovuto all'aumento di prezzo (€ 2 per unità venduta), pari all'area del rettangolo *CDFB*, cioè a € 32.000 $[16 \times (12 - 10)]$. Questa parte del precedente surplus dei consumatori non è dunque perduta, ma si trasforma in rendite da contingentamento dei produttori cinesi. Rimane però il triangolo *DFE*, la cui area rappresenta un valore di € 4.000 $[(20 - 16) \times (12 - 10) / 2]$ che è andato completamente perduto. Questo valore è chiamato **costo netto** del provvedimento di contingentamento delle importazioni.

(E' opportuno notare che l'analisi è limitata agli effetti del provvedimento solo sul mercato del bene specifico. Per un'analisi più completa occorrerebbe vedere gli effetti del provvedimento sul mercato dei beni sostituti prodotti in Italia e sull'occupazione complessiva).

Approfondimento 2.2

Beni inferiori (da inserire a p. 129, alla fine del paragrafo sulle curve di Engel)

Tanto i beni di lusso quanto i beni di prima necessità, sono beni normali, il cui consumo, sia pure con modalità diverse, cresce al crescere del reddito. Per i beni inferiori, invece, il consumo diminuisce al crescere del reddito, come mostrato in figura A.2.2.1

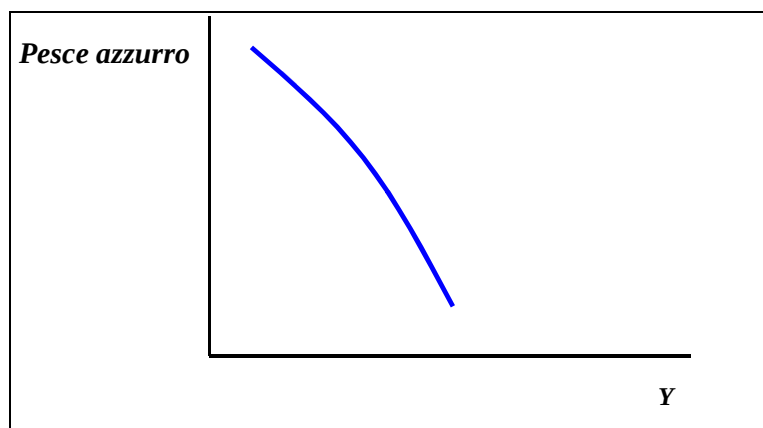


Figura A.2.2.1

Approfondimento 3

Effetto reddito ed effetto sostituzione per i beni inferiori. (da inserire a p. 130 alla fine del capitolo)

Come abbiamo visto nel capitolo 5, pp. 129-130, l'effetto reddito e l'effetto sostituzione hanno normalmente la stessa direzione e si sommano. Per comodità, riportiamo la figura 5.19.

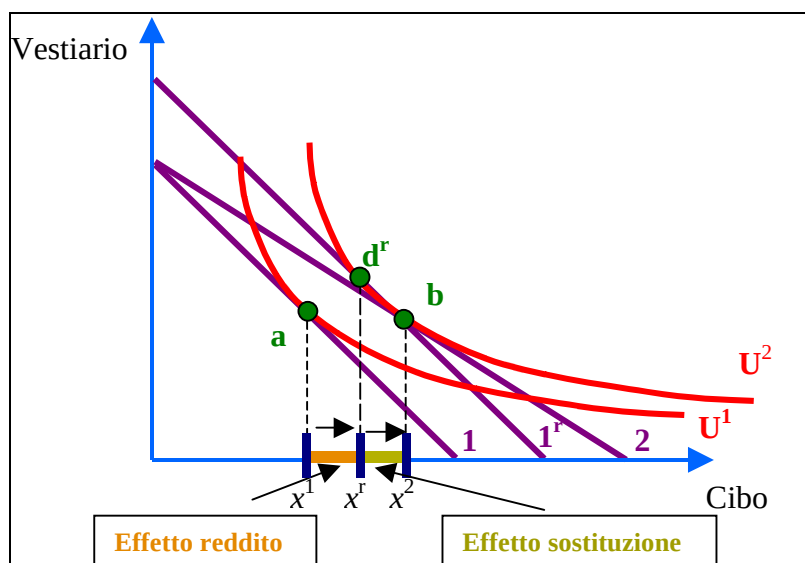


Figura 5.19

Che cosa succede, però, se il bene considerato è un bene inferiore, come il pesce azzurro? Come sappiamo, nel caso dei beni inferiori l'effetto reddito è negativo, cioè al crescere del reddito il

consumo tende a diminuire. Effetto reddito ed effetto sostituzione hanno in questo caso direzioni opposte.

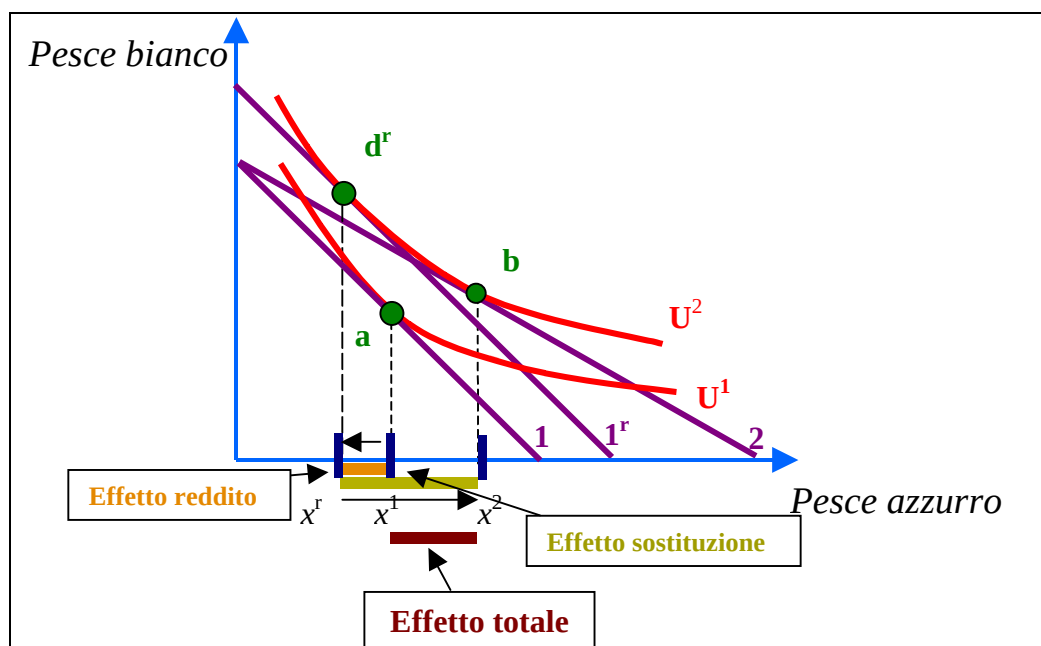


Figura A2.3.1

Nella figura A2.3.1 è scomposto l'effetto complessivo dovuto ad una diminuzione del prezzo del pesce azzurro. L'effetto complessivo è rappresentato dall'aumento del consumo da x^1 a x^2 . Tuttavia l'effetto reddito è negativo. Essendo il bene inferiore, una diminuzione del suo prezzo, aumentando il reddito reale del consumatore, tende a far diminuire il suo consumo da x^1 a x^r , poiché il consumatore sceglierebbe di acquisire il panier d^r , quando la curva di indifferenza sale da U^1 a U^2 e corrispondentemente il reddito sale dalla retta di bilancio 1 alla retta parallela (in cui cioè il rapporto tra i prezzi resta lo stesso) 1^r. Tuttavia, come sappiamo, nella realtà non è aumentato il reddito, ma è diminuito il prezzo del pesce azzurro. Di conseguenza la retta di bilancio rilevante è la 2, che è tangente alla curva di indifferenza 2 nel punto indicato dal panier b . L'effetto sostituzione è quindi indicato dal passaggio dalla quantità di pesce azzurro x^r alla quantità x^2 .

Come si vede l'effetto reddito non è generalmente in grado di annullare l'effetto sostituzione, cioè la tendenza ad aumentare il consumo di un bene inferiore in seguito ad una diminuzione del suo prezzo è sempre maggiore della tendenza a diminuire il suo consumo per l'effetto reddito, cosicché la domanda del bene resta inclinata negativamente.

Si è molto discusso di un caso particolare, detto "paradosso di Giffen", riferito al caso del consumo delle patate in Irlanda nel secolo XIX quando, in seguito ad una carestia, il prezzo delle patate crebbe. Poiché le patate erano la componente principale della dieta degli irlandesi poveri, molte famiglie, avendo a disposizione un reddito reale inferiore, furono costrette a rinunciare

completamente al consumo degli alimenti più costosi come la carne e ad aumentare il consumo di patate.

E' dubbio che questo caso si sia verificato effettivamente, ma in ogni caso un bene, per potere vedere la sua domanda aumentare in seguito ad un incremento del suo prezzo, deve avere le seguenti caratteristiche:

1. essere un bene inferiore
2. deve coprire una quota molto rilevante nel bilancio di spesa del consumatore in modo che l'effetto reddito, in seguito alla variazione del suo prezzo, sia rilevante
3. deve avere pochissimi sostituti, in modo che l'effetto sostituzione sia molto piccolo rispetto all'effetto reddito.

Nella pratica, la probabilità della presenza contemporanea di queste caratteristiche per un bene è molto bassa.

Ancora sull'effetto reddito e l'effetto sostituzione: variazione equivalente, variazione compensativa del reddito e equazione di Slutsky.

Il passaggio dalla retta di bilancio 1 alla retta di bilancio 1' nella figura A2.3.1 è anche chiamato **variazione equivalente** del reddito. Essa ci dice quale è l'incremento monetario del reddito che il consumatore avrebbe dovuto ottenere per aumentare la sua utilità (il passaggio da U^1 a U^2) nella **stessa misura** in cui essa viene effettivamente aumentata dalla riduzione di prezzo del bene, se quest'ultimo fosse rimasto immutato. Cioè con la variazione equivalente si elimina **l'effetto sostituzione**. La variazione equivalente ci dice quanto reddito occorre aggiungere al consumatore, dati i **prezzi iniziali**, affinché egli possa raggiungere il nuovo livello di utilità. La variazione equivalente è quindi positiva quando il prezzo del bene diminuisce (e negativa quando il prezzo del bene aumenta).

Vediamo adesso un altro modo di considerare l'effetto reddito e l'effetto sostituzione attraverso quella che viene chiamata la **variazione compensativa**.

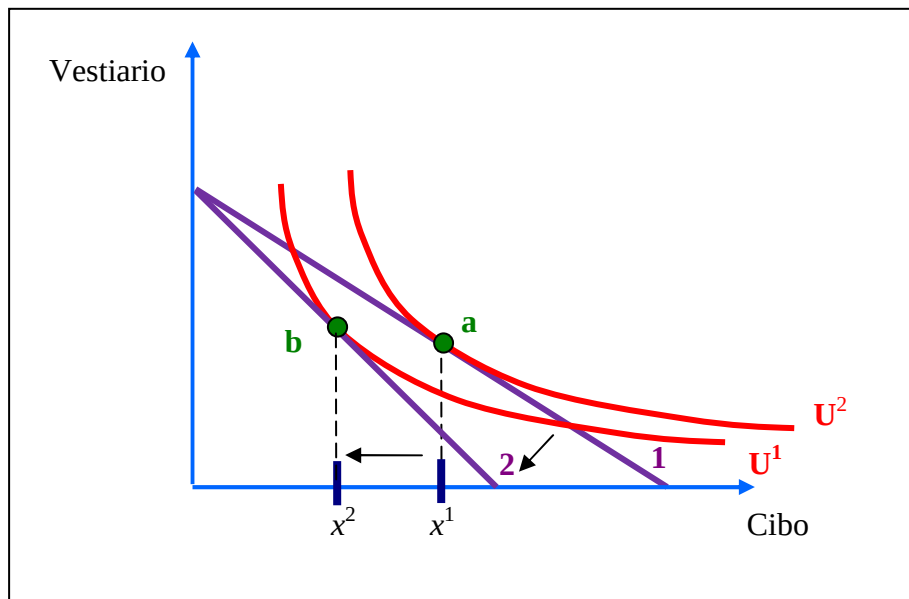


Figura A2.3.2

Supponiamo che il prezzo del bene sia aumentato. Ora ovviamente la retta di bilancio ruota verso sinistra e verso il basso da **1** a **2** e il consumatore è costretto a diminuire la propria utilità passando dal livello U^2 al livello U^1 , dal paniere **a** al paniere **b** e dalla quantità consumata di cibo x^1 alla quantità minore x^2 (figura A2.3.2).

Poniamoci ora la seguente domanda: di quanto dovrebbe aumentare il reddito del consumatore perché gli possa continuare ad acquistare il paniere **a**, pur con il più alto livello del prezzo del cibo? Si comprende quindi perché si parla di variazione compensativa: si tratta ora di immaginare di compensare il consumatore per la sua perdita di benessere.

Algebricamente la retta di bilancio iniziale del consumatore, che ha scelto di consumare le quantità x^1 di cibo e y^1 di vestituario, con un reddito pari a S e prezzi del cibo e del vestituario rispettivamente pari a p_x e p_y è data da:

$$S = p_x x^1 + p_y y^1.$$

Quando il prezzo del cibo sale a p'_x il reddito del consumatore dovrebbe crescere a S' perché egli possa continuare a consumare le stesse quantità dei beni.

$$S' = p'_x x^1 + p_y y^1.$$

La variazione compensativa necessaria di reddito, quindi, sottraendo la prima equazione dalla seconda è

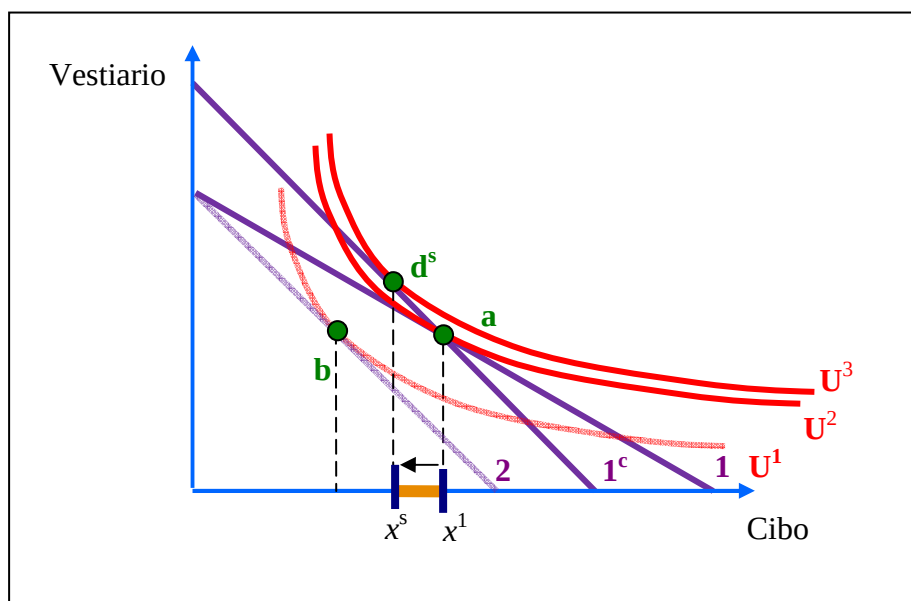
$$S' - S = x^1 (p'_x - p_x).$$

Cioè il consumatore dovrebbe ricevere un reddito aggiuntivo pari alla quantità consumata di cibo moltiplicata la variazione di prezzo.

Tuttavia il consumatore, con la retta di bilancio compensata, pur potendo raggiungere il paniere di beni iniziale, **può migliorare la propria posizione** scegliendo un altro paniere. Infatti la nuova

retta di bilancio ha ora una **pendenza (rapporto tra i prezzi) differente**, e quindi il consumatore sceglierà un nuovo paniere che permette di eguagliare il SMS al nuovo rapporto tra i prezzi. Come si vede dalla figura, può massimizzare il proprio benessere scegliendo il paniere d^s , per il quale $p'_x/p_y = \text{SMS}$. Il paniere giace sulla curva di indifferenza U^3 (figura A2.3.3).

Abbiamo quindi eliminato **l'effetto reddito**. La variazione compensativa, quindi, ci dice quanto reddito occorre aggiungere al consumatore, dati i **nuovi prezzi**, perché esso possa raggiungere lo stesso paniere. La variazione compensativa è quindi positiva quando il prezzo del bene aumenta (e negativa quando diminuisce)



Fugura A2.3.3

La figura mostra appunto la variazione compensativa e il relativo effetto sostituzione. Con il nuovo rapporto dei prezzi, il consumatore avrebbe potuto continuare a raggiungere il paniere iniziale se la sua retta di bilancio fosse divenuta 1^c . Tuttavia migliorerebbe la sua posizione acquistando il paniere d^s . La variazione $x^1 - x^s$ del consumo è quindi l'effetto sostituzione. L'effetto reddito è ovviamente la variazione residua.

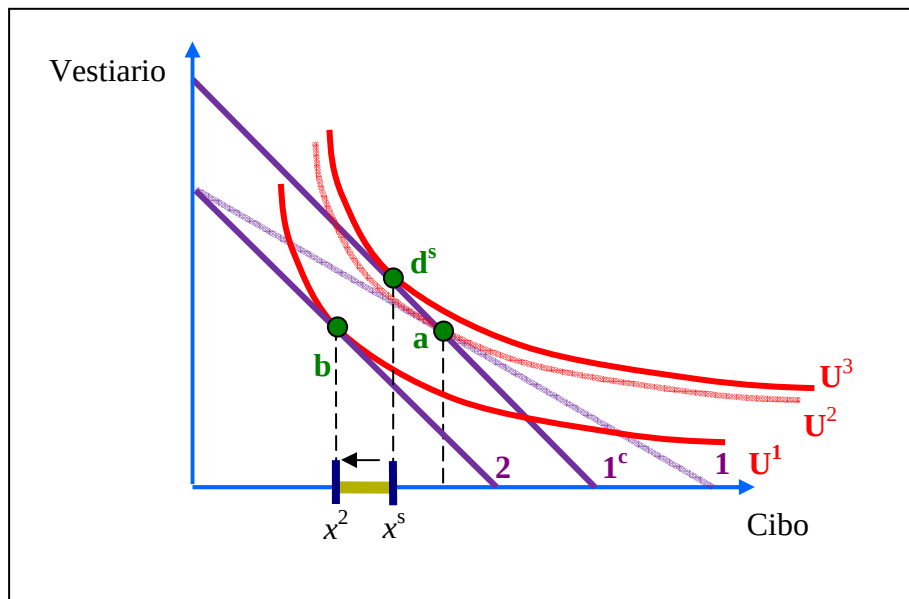


Figura A2.3.4

Per l'effetto reddito dobbiamo infatti guardare il passaggio dal paniere d^s al paniere b . La retta di bilancio effettiva è la 2, che rappresenta un reddito minore di quello compensato (retta di bilancio 1^c). La quantità consumata diminuisce da x^s a x^2 . (Si noti che il bene è un bene normale).

L'effetto totale è anche in questo caso la somma dei due effetti: figura A2.3.5.

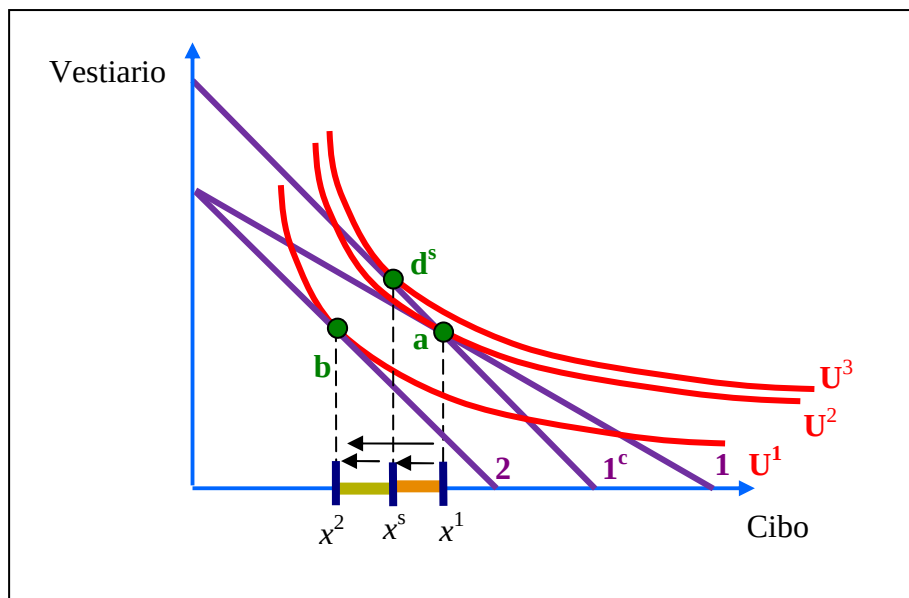


Figura A2.3.5

Algebricamente l'effetto sostituzione e l'effetto reddito possono essere mostrati attraverso l'equazione dell'economista russo Eugene Slutsky.

Infatti l'effetto sostituzione è dato dalla seguente equazione, chiamando Δx^s la variazione della quantità domandata del bene x dovuta all'effetto sostituzione

$$\Delta x^s = x^1(S, p_x) - x^s(S', p'_x)$$

La variazione della quantità domandata del bene x dovuta all'effetto sostituzione è data dalla quantità x^1 , che era richiesta quando il reddito era S e il prezzo del cibo p_x meno la quantità x^s che è domandata quando il reddito è quello compensato S' e il prezzo p'_x .

La variazione dovuta all'effetto reddito è invece Δx^r

$$\Delta x^r = x^s(S', p'_x) - x^2(S, p'_x)$$

La variazione dovuta all'effetto reddito è dunque la quantità x^s che viene domandata al reddito compensato e al prezzo p'_x , meno la quantità domandata al reddito effettivo S e al prezzo p'_x .

L'equazione di Slutsky è dunque

$$\Delta x = \Delta x^s + \Delta x^r = [x^1(S, p_x) - x^s(S', p'_x)] + [x^s(S', p'_x) - x^2(S, p'_x)]$$

Si ricordi che per i beni normali tanto l'effetto sostituzione che quello reddito sono negativi al crescere del prezzo.

Approfondimento 4

Approfondimento analitico sulle curve di indifferenza (da inserire a fine capitolo, p. 130).

La costruzione algebrica delle curve di indifferenza.

Anche se i consumatori hanno solo ordinamenti di preferenze è spesso utile assegnare loro una funzione di utilità, in modo da trattare algebricamente tutte le informazioni relative.

Supponiamo, per esempio, che le preferenze di un consumatore, relative al consumo di due beni X e Y siano rappresentate dalla funzione indice di utilità $U(X, Y) = XY$. Per funzione indice si intende che l'utilità può essere misurata solo ordinalmente e quindi si indica la relazione tra il *livello* (e non la *quantità* misurata in senso cardinale) di benessere con le quantità dei beni consumati. Poiché una curva di indifferenza rappresenta tutte le combinazioni di x e y che danno lo stesso livello di utilità, una curva di indifferenza relativa al livello di utilità pari a U_1 sarà rappresentata dalla funzione

$$U_1 = XY$$

L'equazione può essere riscritta come

$$Y = \frac{U_1}{X}$$

Supponiamo ora di voler conoscere l'equazione della curva di indifferenza relativa al livello di utilità $U=1$. Sostituendo questo valore nella A5.2 otteniamo subito:

$$Y = \frac{1}{X}$$

Ugualmente possiamo procedere per livelli diversi di utilità (ad es. 1, 2, 3,...) e possiamo quindi calcolare le diverse combinazioni di X e Y che sono ugualmente preferite e disegnare una mappa di curve di indifferenza.

La mappa delle curve di indifferenza, calcolata per questo esempio, è la seguente

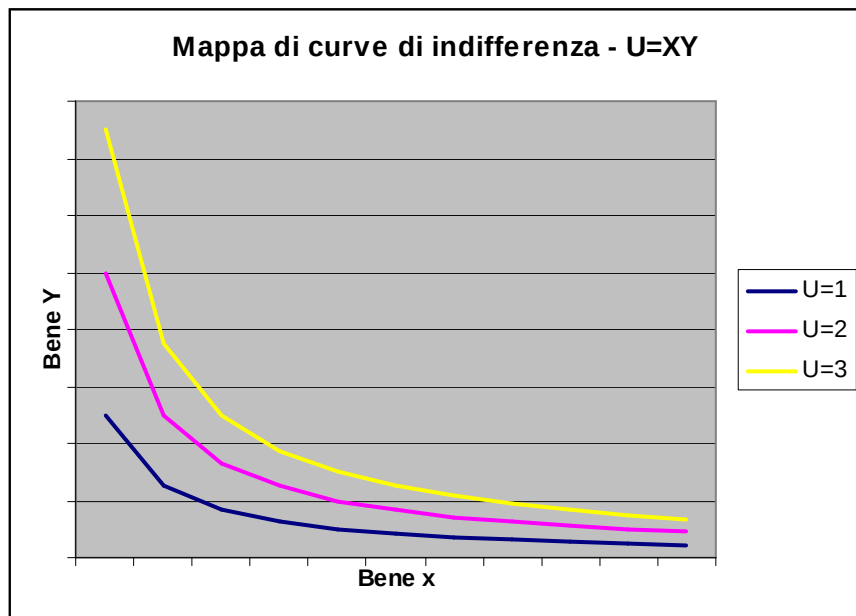


Figura A2.4.1

Procediamo ora ad illustrare un modo per risolvere algebricamente il problema del massimo del consumatore. Formalmente il problema è quello di trovare i valori di x e y nel punto massimo della funzione di utilità sotto il vincolo di bilancio e si scrive

Max $U(X,Y)$ sotto il vincolo $S = p_x X + p_y Y$

Un metodo che garantisce la soluzione di questo problema è l'uso dei moltiplicatori di Lagrange.

In quanto segue si illustrerà un metodo alternativo che richiede una notazione meno pesante.

Si può partire dal vincolo di bilancio, scritto come $Y = \frac{S}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} X$

Sostituendo il valore della Y nella funzione di utilità otterremo:

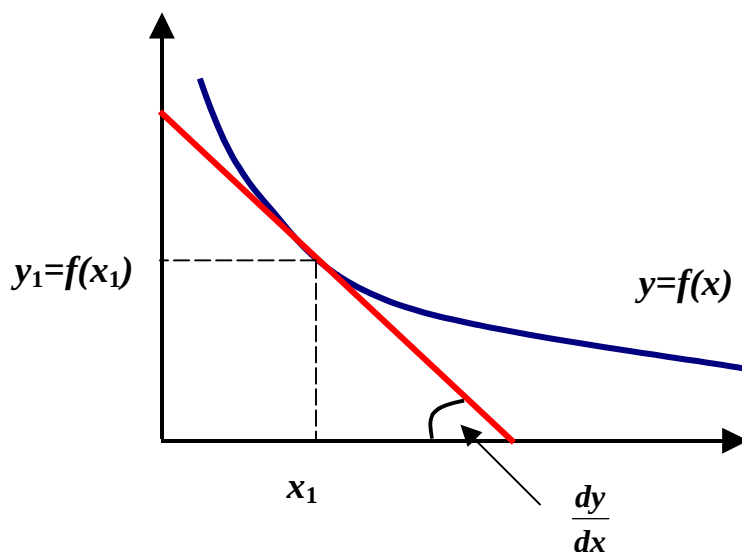
$$1) U = \left(X, \frac{S}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} X \right)$$

Il massimo di questa funzione può essere trovato ponendo uguale a zero la derivata rispetto a x

$$2) \frac{dU}{dX} = 0.$$

Appendice di pratica

Si ricorda che la derivata di una funzione può essere interpretata come la pendenza della retta tangente alla curva che rappresenta la funzione nel punto in esame, come si vede nella figura:



Ai nostri fini si ricorderà che la derivata di una costante è sempre uguale a zero e che la derivata di una potenza si ottiene come nell'esempio che segue:

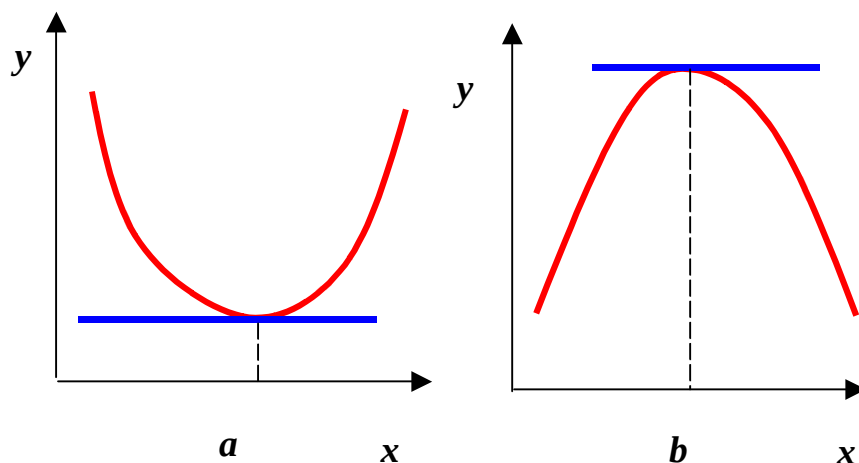
$$y=Ax^n$$

$$\frac{d}{dx}(Ax^n) = Anx^{n-1}$$

cioè si ottiene moltiplicando la funzione per il numero che sta alla potenza e diminuendo la potenza di uno.

Ricordiamo infine che se una funzione ha un punto di massimo o di minimo in quel punto la derivata della funzione è sempre uguale a zero.

L'esempio grafico vale a chiarire questo punto, poiché le rette tangenti al punto di minimo (**a**) o a quello di massimo (**b**) sono orizzontali e la pendenza di una retta orizzontale è sempre uguale a zero:



Il punto a rappresenta un minimo mentre il punto b un massimo. In entrambi questi punti la retta tangente risulta orizzontale e quindi la sua pendenza è uguale a zero. Quindi per trovare il massimo o il minimo di una funzione (se esiste) occorre eguagliare la derivata a zero. Per sapere se si tratta di un massimo o di un minimo occorrerebbe poi trovare la derivata seconda (cioè la derivata della derivata): in presenza di un minimo, come nel punto a la derivata seconda è positiva, perché lungo la curva la pendenza cresce, mentre nel punto b di massimo la derivata seconda è negativa perché la pendenza della curva decresce spostandoci verso destra. Nella maggior parte dei casi che incontreremo, però, sapremo già intuitivamente se siamo in presenza di un massimo o di un minimo e non avremo bisogno di calcolare la derivata seconda

Un esempio varrà a chiarire la procedura che abbiamo visto di massimizzazione dell'utilità del consumatore:

Sia la funzione di utilità $U(X,Y)=XY$, $S=40$, $p_x=4$ e $p_y=2$. Risolvendo il vincolo di bilancio rispetto a Y otteniamo $Y=20-2X$. Sostituendo il valore di Y nella funzione di utilità si ottiene: $X(20-2X)=20X-2X^2$. Derivando e ponendo uguale a zero si ha: $20-4X=0$. La quantità di X che massimizza la funzione la soddisfazione del consumatore sotto il vincolo di bilancio è quindi $X=5$. Possiamo quindi trovare la quantità di Y nel vincolo di bilancio: $Y=20-2 \times 5=10$. L'indice di utilità raggiunto dal consumatore è $XY=50$.

La rappresentazione grafica di questo problema è la seguente:

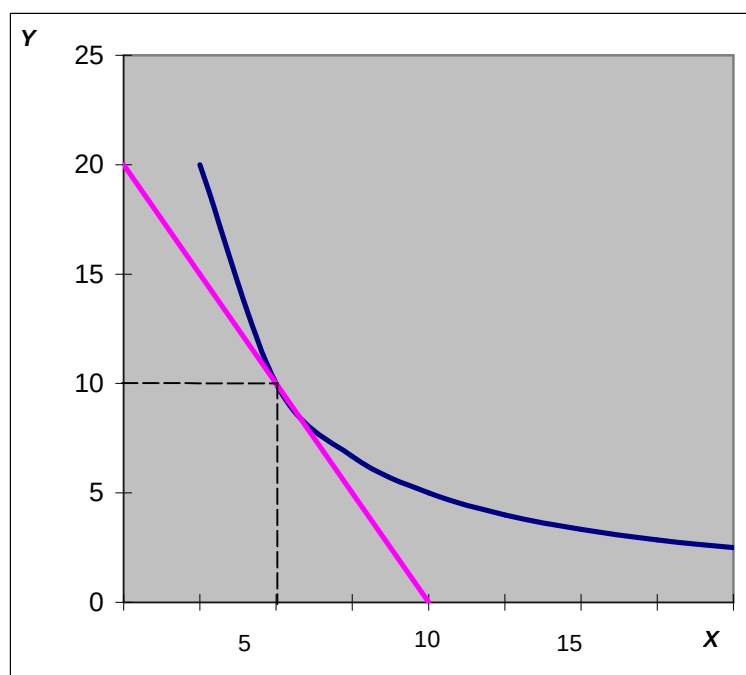


Figura A2.4.2

Appendice 5

Il Saggio Marginale di Sostituzione

Consideriamo la funzione indice di utilità $U = U(X, Y)$

Nonostante siamo in ambito ordinalista, possiamo definire l'utilità marginale del bene X (Um_x) come la derivata parziale della funzione rispetto a X

$$3) Um_x = \frac{\partial U}{\partial X}$$

In termini non formali la derivata parziale indica infatti l'incremento di utilità collegato ad un incremento infinitesimo del consumo del bene X .

Analogamente la derivata parziale della funzione rispetto a Y indica l'utilità marginale di Y (Um_y):

$$4) Um_y = \frac{\partial U}{\partial Y}$$

Consideriamo la funzione indice di utilità $U = XY$

L'utilità marginale del bene X , derivando la funzione per X (ai nostri scopi pratici possiamo considerare la derivata parziale di una funzione a più variabili come la derivata di una funzione ad una sola variabile, considerando ad esempio Y come una costante) e ricordando che $X^0 = 1$ è

$$Um_x = Y$$

L'utilità marginale di Y , analogamente, è

$$Um_y = X$$

Consideriamo ora una curva di indifferenza che ovviamente rappresenta un livello di utilità costante in ogni suo punto. Spostandoci lungo la curva di indifferenza assisteremo ad un incremento della quantità consumata di un bene (e quindi ad un incremento della utilità ottenuta dal consumo del bene) e ad una diminuzione del consumo dell'altro bene (e quindi ad una diminuzione della utilità ottenuta). In termini formali, per variazioni sufficientemente "piccole", se aumenta il consumo di X e diminuisce quello di Y possiamo indicare come l'incremento dell'utilità associata a X il prodotto dell'utilità marginale di X per l'incremento della quantità consumata e come diminuzione dell'utilità associata a Y il prodotto dell'utilità marginale di Y per la variazione della quantità. Poiché lungo la curva di indifferenza il livello di utilità resta sempre lo stesso, l'incremento e la diminuzione di utilità associate al consumo dei due beni debbono annullarsi. In simboli

$$5) dU = Um_x dX - Um_y dY = \frac{\partial U}{\partial X} dX - \frac{\partial U}{\partial Y} dY = 0$$

In questa notazione si è usato la lettera d al posto della lettera greca Δ ad indicare variazioni infinitesimali.

Da questa equazione si ottiene

$$6) SMS = \frac{dY}{dX} = \frac{Um_x}{Um_y} = \frac{\partial U / \partial X}{\partial U / \partial Y}$$

Si vede subito che il Saggio Marginale di Sostituzione, cioè il rapporto tra la variazione del bene Y e la variazione del bene X è uguale al rapporto tra l'utilità marginale del bene Y e l'utilità marginale del bene X , cioè al rapporto tra le derivate parziali. Nell'esempio fatto sopra in cui $U=XY$ il rapporto tra le utilità marginali è $\frac{Y}{X}$.

Consideriamo ora la scelta ottima del consumatore, in cui il SMS è uguale al rapporto tra i prezzi. In questo punto si avrà dunque, per quanto abbiamo ora visto, che il rapporto tra i prezzi è uguale al rapporto tra le utilità marginali:

$$7) \frac{p_x}{p_y} = \frac{\partial U / \partial X}{\partial U / \partial Y}$$

Da questa equazione otteniamo:

$$8) \frac{\partial U / \partial X}{p_x} = \frac{\partial U / \partial Y}{p_y}$$

Ma questo non è che un modo diverso per arrivare alla seconda legge di Gossen. Il consumatore massimizza la sua utilità quando le utilità marginali ponderate per i prezzi sono eguagliate per tutti i beni.

Più in generale se $U=X^\alpha Y^\beta$, con $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$:

$$9) Um_x = \alpha X^{(\alpha-1)} Y^\beta = \frac{\alpha(X^\alpha Y^\beta)}{X} = \alpha \frac{U}{X}$$

$$10) Um_y = \beta X^\alpha Y^{(\beta-1)} = \frac{\beta(X^\alpha Y^\beta)}{Y} = \beta \frac{U}{Y}$$

Per quanto riguarda il SMS avremo:

$$11) \frac{\alpha U}{X} / \frac{\beta U}{Y} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{Y}{X}$$

Possiamo ora utilizzare un metodo pratico per trovare più velocemente il punto di equilibrio del consumatore: sappiamo infatti che in equilibrio l'SMS è uguale al rapporto tra i prezzi. Quindi possiamo porre

$$12) \frac{\alpha}{\beta} \frac{Y}{X} = \frac{p_x}{p_y}$$

Ricaviamo la Y in questa funzione:

$$Y = \frac{p_x \beta X}{p_y \alpha}$$

Possiamo ora sostituire il valore così ottenuto nella retta di bilancio:

$$\frac{p_x \beta X}{p_y \alpha} = \frac{S}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} X$$

$$X \frac{p_x}{p_y} \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right) = \frac{S}{p_y}$$

$$13) X = \frac{S}{p_x \left(\frac{\beta}{\alpha} + 1 \right)}$$

Che può essere ulteriormente semplificato in questo modo

$$14) X = \frac{S}{p_x \frac{\beta + \alpha}{\alpha}} = \frac{S \frac{\alpha}{\alpha + \beta}}{p_x}$$

Ovviamente per il bene Y varrà l'equazione:

$$15) Y = \frac{S \frac{\beta}{\alpha + \beta}}{p_y}$$

(Si consiglia di ricordarsi queste formule perché saranno utili per risolvere in breve tempo analoghi esercizi)

Altrimenti, ottenuto il valore di X si ottiene subito dalla equazione della retta di bilancio anche il valore della Y.

Nel caso in cui $\alpha + \beta = 1$ le formule 14 e 15 si semplificano ulteriormente e si ottiene

$$14.1 X = \frac{S \alpha}{p_x}$$

$$15.1 Y = \frac{S \beta}{p_y}$$

Si noti che in questo caso la spesa totale per ciascun bene è proporzionale rispettivamente ai coefficienti α e β .

Un esempio numerico

$$\text{Sia } U = X^{\frac{2}{3}} Y^{\frac{1}{3}}$$

Risolvendo le derivate parziali otteniamo:

$$Um_x = \frac{2}{3} X^{\left(\frac{2}{3}-1\right)} Y^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \frac{X^{\frac{2}{3}} Y^{\frac{1}{3}}}{X} = \frac{2}{3} \frac{U}{X}$$

e

$$Um_y = \frac{1}{3} X^{\frac{2}{3}} Y^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \frac{1}{3} \frac{X^{\frac{2}{3}} Y^{\frac{1}{3}}}{Y} = \frac{1}{3} \frac{U}{Y}$$

Il saggio marginale di sostituzione è eguale al rapporto tra le utilità marginali

$$SMS = \frac{2}{3} \frac{U}{X} / \frac{1}{3} \frac{U}{Y} = 2 \frac{Y}{X}$$

Possiamo ora utilizzare il nostro metodo per trovare i valori di X e Y che massimizzano il benessere del consumatore.

Sia $S=30$, $p_x=4$ e $p_y=2$.

Dall'eguaglianza tra rapporto tra i prezzi e SMS otteniamo

$$2 = 2 \frac{Y}{X}$$

$$Y = X$$

Sostituendo nella retta di bilancio otteniamo

$$X = 15 - 2X$$

$$3X = 15$$

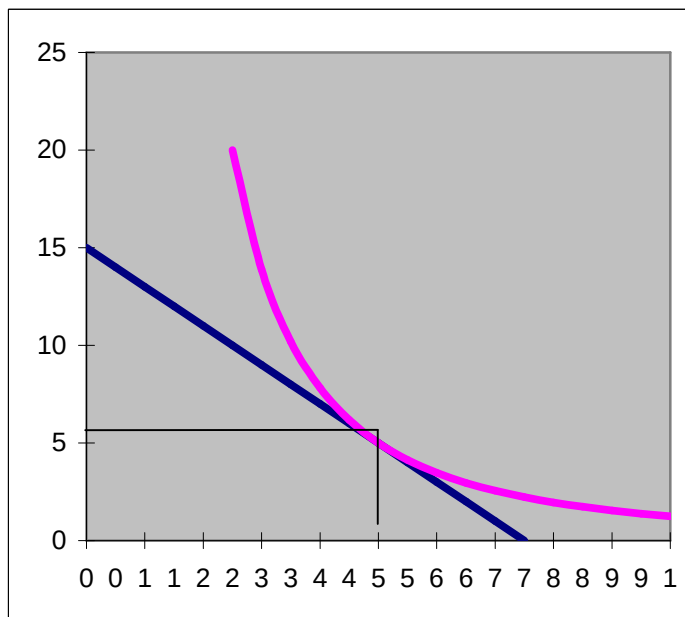
$$X=5$$

Dall'equazione della retta di bilancio si ricava poi il valore della $Y=5$.

D'altra parte lo stesso valore di X si sarebbe trovato applicando direttamente la formula trovata nell'equazione 14), o meglio la formula 14.1), poiché $\alpha+\beta=1$, senza dover rifare tutto il procedimento:

$$X = \frac{S\alpha}{p_x} = \frac{30 * \frac{2}{3}}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

La rappresentazione grafica del problema è la seguente:



Esempio numero 2.

Supponiamo ora che il reddito a disposizione del consumatore sia $S=4200$, $p_x=40$ e $p_y=70$. Sia la

funzione di utilità $U = X^{\frac{1}{3}} Y^{\frac{1}{2}}$

Per risolvere semplicemente il problema di massimizzazione dell'utilità del consumatore basterà ricorrere alle equazioni 14) e 15).

$$\text{Applicando la 14) otteniamo: } X = \frac{S \frac{\alpha}{\alpha + \beta}}{p_x} = \frac{4200 \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}}{40} = \frac{4200 \frac{2}{5}}{40} = \frac{1680}{40} = 42$$

$$\text{Applicando la 15 si ottiene } Y = \frac{S \frac{\beta}{\alpha + \beta}}{p_y} = \frac{4200 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}}{70} = \frac{4200 \frac{3}{5}}{70} = \frac{2520}{70} = 36$$

Che questa soluzione è corretta si può mostrare calcolando il SMS della funzione indice dell'utilità quando le quantità di X e Y sono rispettivamente 42 e 36.

$$SMS = \frac{\alpha}{\beta} \frac{Y}{X} = \frac{1}{3} \frac{36}{42} = \frac{4}{7}$$

Il SMS è evidentemente uguale, nel punto di massimo, al rapporto tra i prezzi di X e Y , rispettivamente 40 e 70.

L'effetto reddito, l'effetto sostituzione e l'equazione di Slutsky.

Vediamo come è possibile separare effetto reddito ed effetto sostituzione utilizzando l'equazione di Slutsky con un esempio.

Un consumatore ha un reddito di € **2.400** che impiega interamente domandando i beni x e y . La situazione di partenza è $p_x=20$ e $p_y=25$. La funzione indice di utilità del consumatore è $U = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$.

Il consumatore massimizza il proprio benessere consumando $\frac{2400 \frac{1}{3}}{20} = 40$ unità di x e **64** unità di y .

Si supponga ora che il prezzo del bene x cresca: $p'_x=32$. Quale sarà la variazione del consumo del bene x ? Quanto di questa variazione è dovuta all'effetto sostituzione e quanto all'effetto reddito?

La quantità consumata del bene diminuisce. Avremo infatti $x^2 = \frac{2400 \frac{1}{3}}{32} = 25$. La variazione finale è quindi di $40-25=15$. Scomponiamo ora la variazione. Il reddito che permetterebbe al consumatore di consumare il paniere iniziale è $40*32+64*25= € 2880$. Tuttavia, con questo nuovo reddito e dato il nuovo rapporto dei prezzi il consumatore massimizzerebbe la sua soddisfazione consumando una quantità minore del bene (l'effetto sostituzione è sempre negativo al crescere del prezzo). La quantità di x domandata sarebbe quindi $\frac{2880 \frac{1}{3}}{32} = 30$ unità. L'effetto sostituzione è quindi $40-30=10$, mentre l'effetto reddito è $30-25=5$.

Appendice 6.

La scelta tra lavoro e tempo libero (di seguito alla precedente)

Il modello di scelta del consumatore può essere applicato a varie situazioni. Una possibile applicazione riguarda l'offerta di lavoro da parte di un singolo agente economico. Per adattare questo problema allo strumento analitico delle curve di indifferenza e delle rette di bilancio, è necessario riformularlo in un modo che a prima vista potrebbe sembrare inconsueto. Se il consumatore deve scegliere tra due beni che hanno per lui utilità positiva, la scelta si attua tra il bene cui rinunciando lavorando, cioè il tempo libero in cui ci riposiamo, ci divertiamo, ci nutriamo e ci dedichiamo a qualsiasi altra attività gradevole e il reddito, che otteniamo, sacrificando il tempo libero, cioè lavorando. Lavorare stanca, diceva Cesare Pavese e il lavoro, in questa analisi, è considerato un non bene. Le preferenze possono quindi essere espresse da una mappa di curve di indifferenza che rappresentano le diverse combinazioni di reddito e tempo libero ugualmente preferite dal lavoratore.

Supponiamo esista unico tipo di lavoro, che la retribuzione oraria sia data e che il lavoratore sia libero di scegliere quante ore lavorare in un giorno. Il vincolo di bilancio può essere costruito in questo modo: se il lavoratore decidesse di consumare solo tempo libero, il suo reddito sarebbe uguale a zero e le ore di tempo libero in un giorno sarebbero per definizione uguali a 24. Se decidiamo di misurare il tempo libero sull'asse delle ascisse, l'intercetta sarà pari a 24. Viceversa, l'intercetta con l'asse delle ordinate sarà data dal reddito guadagnato nel caso impossibile in cui il lavoratore decida di lavorare 24 ore in una giornata, cioè, chiamando w_o la retribuzione oraria, da $24w_o$. La scelta effettiva da parte del lavoratore avverrà, almeno nella maggior parte dei casi in cui il soggetto non sia né un automa né un perfetto ozioso, in un punto intermedio. Il reddito effettivo Y del lavoratore sarà pari alle ore lavorate, cioè 24 ore meno le ore di tempo libero TI , moltiplicate il salario orario: $Y=24w_o-w_oTI$.

Un esempio renderà più comprensibile la nostra analisi: supponiamo che la retribuzione oraria sia pari a € 10. Il reddito massimo ottenibile in astratto è dunque € 240. Se il nostro soggetto decide di consumare 16 ore di tempo libero il suo reddito giornaliero è $240-160 = € 80$. 160 è infatti il reddito cui il consumatore rinuncia per avere a sua disposizione 16 ore di tempo libero. Se la scelta fosse stata di 20 ore di tempo libero, il nostro lavoratore avrebbe avuto un reddito giornaliero pari a € 40. Sembra un modo indiretto di calcolare il reddito giornaliero, ma ci mostra che anche il tempo libero ha un suo prezzo: un'ora di tempo libero ci costa infatti il salario orario cui rinunciamo.

L'equazione della retta di bilancio è quindi $240=w_oTI+Y$, dove 240 è il "valore" dei due beni di cui veniamo in possesso, cioè il reddito effettivo Y (il cui prezzo, essendo espresso in unità di moneta è per definizione 1) e le unità di tempo libero, il cui prezzo è il salario orario cui rinunciamo per godere di un'ora di questo bene. In questo modo, qualcuno potrebbe obiettare, sembriamo tutti più ricchi di quanto effettivamente siamo, dato che per definizione il valore del consumo giornaliero è uguale alla retribuzione oraria moltiplicata per 24 ore. Questa rappresentazione della "ricchezza" di ciascuno è il risultato di un modo tipico di ragionare degli economisti ed è accettabile solo in relazione al problema specifico che ci stiamo ponendo, cioè la scelta tra reddito "effettivo" e tempo libero, mentre evidentemente non può essere estesa al di là di questo problema. Dall'altra parte il ragionamento dipende dalla semplificazione, evidentemente non realistica, che ciascuno sia completamente libero di scegliere quanto lavorare in una giornata, da zero a 24 ore.

Risolvendo per Y possiamo scrivere

$$Y=240-w_oTI$$

La retribuzione oraria (con segno negativo) è quindi la pendenza della nostra retta di bilancio, ed è il rapporto tra il prezzo del tempo libero w_o e il prezzo unitario del reddito effettivo pari a 1. Per

definizione il prezzo del reddito monetario è infatti pari al valore della moneta in cui espresso il reddito, e il prezzo di un'unità di moneta è evidentemente pari ad 1 (cioè, il valore di 1 € è uno)

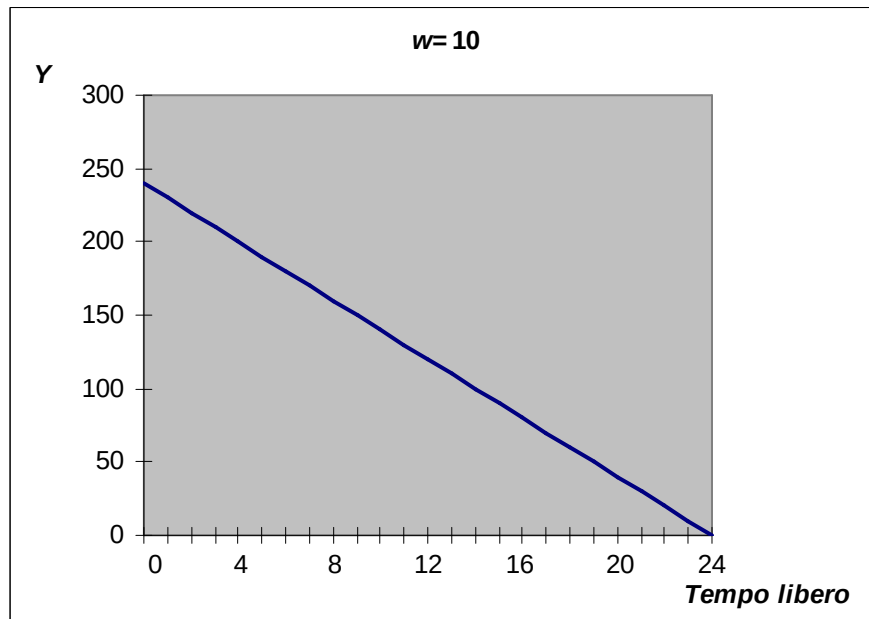


Figura A.2.6.1

La figura illustra la retta di bilancio nell'ipotesi che il salario sia uguale a € 10.

La scelta ottima del lavoratore, in queste condizioni, è come ci si deve aspettare, quella corrispondente al punto in cui la retta di bilancio è tangente ad una curva di indifferenza, che risulta la più alta raggiungibile, in cui la pendenza della retta di bilancio, data dal saggio di retribuzione oraria w_0 è uguale alla pendenza della curva di indifferenza, data dal saggio marginale di sostituzione, cioè il rapporto tra la variazione del reddito sulla variazione del tempo libero che lasciano il lavoratore indifferente.

Esercizio no. 1

Supponiamo che la funzione di utilità del lavoratore per reddito e tempo libero sia $U(Tl, Y) = Tl^2 Y$.

Il problema è

Max $U(Tl, Y) = Tl^2 Y$, sotto il vincolo $10Tl + Y = 240$

Ricavando Y dal vincolo di bilancio otteniamo, come sappiamo $Y = 240 - 10Tl$. Sostituendo il valore di Y nella funzione di utilità si ottiene $Tl^2(240 - 10Tl) = 240Tl^2 - 10Tl^3$.

Derivando rispetto a Tl e ponendo uguale a zero troviamo il punto di massimo della funzione:

$$\frac{dU}{dTl} = 480Tl - 30Tl^2 = 0.$$

La funzione ammette due soluzioni: la prima, che possiamo trascurare perché non significativa, è $Tl=0$ (il lavoratore **non** può lavorare 24 ore al giorno), la seconda, che invece è la soluzione del nostro problema si ha risolvendo l'equazione $480 - 30Tl = 0$, il cui risultato è 16.

Il lavoratore massimizza dunque la propria utilità “consumando” 16 ore di tempo libero e lavorando le restanti 8. E’ dunque evidente che il suo reddito effettivo è di € 80.

La rappresentazione grafica del problema è riportata di seguito:

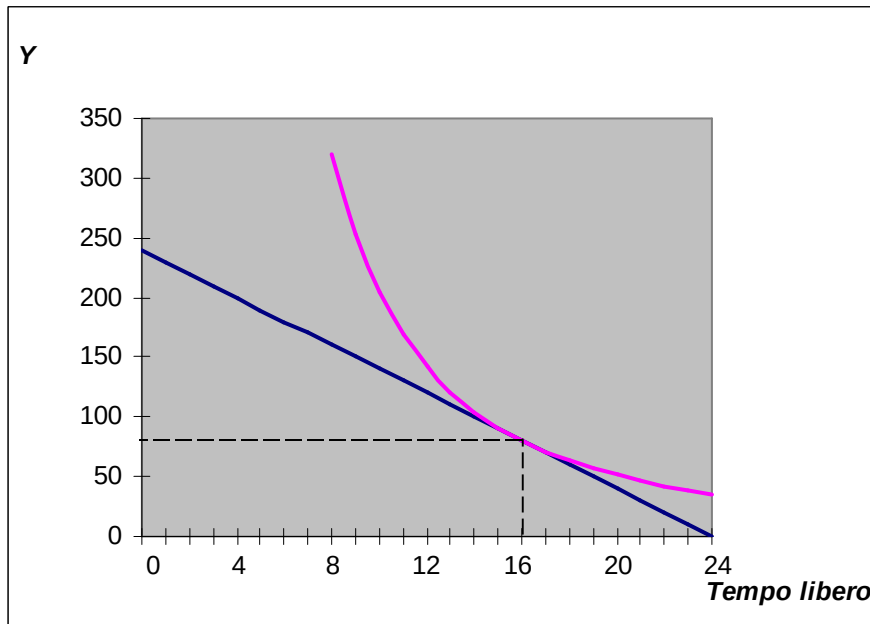


Figura A.2.6.2

Esercizio no.2

Un secondo esempio utilizzando funzioni del tipo di quelle già studiate sopra, può essere il seguente:

La funzione indice di preferenza tra reddito da lavoro e tempo libero del consumatore è

$U = Tl^{\frac{3}{4}} Y^{\frac{1}{4}}$. Il saggio di salario orario è $w_0=12$. Quale sarà la scelta del lavoratore?

Notiamo subito che la retta di bilancio è data da $Y=288-12 \cdot Tl$.

La scelta ottimale di tempo libero del lavoratore può poi essere subito indicata ricorrendo ancora una volta ricorrendo ad equazioni del tipo 14). Nel nostro caso, poiché la somma dei coefficiente delle potenze del tempo libero e del reddito è pari ad 1, possiamo ricorrere alla equazione semplificata 14.1):

$$Tl = \frac{24w_0^{\frac{3}{4}}}{w_0} = 24 \frac{3}{4} = 18$$

Il reddito scelto dal consumatore è quindi $(24-18)12=72$

Lo stesso valore per il reddito si sarebbe ottenuto dall’equazione 15.1, ricordando che per definizione il prezzo del reddito monetario è uguale ad 1.

$$Y = 24w_0 \frac{1}{4} = 288 \frac{1}{4} = 72$$

Si noti che nel caso particolare del tipo di funzioni indici di utilità qui utilizzate la scelta del tempo libero è indipendente dall'altezza del salario e dipende solo dai coefficienti α e β della funzione di utilità. Qualsiasi sia l'altezza del salario il lavoratore sceglierà di “consumare” 18 ore di tempo libero, come si può notare dall'equazione di determinazione del tempo libero ottimale, in cui il saggio di salario compare tanto al numeratore che al denominatore della frazione e può essere eliminato. Evidentemente, invece, il salario influenza l'altezza del reddito effettivamente ricevuto dal lavoratore.

Anche in questo caso si può mostrare che la scelta del lavoratore avviene in un punto della curva di indifferenza in cui il saggio marginale di sostituzione è uguale alla pendenza della retta di bilancio, cioè al saggio di salario.

$$SMS = \frac{3}{4} / \frac{1}{4} \frac{Y}{Tl} = 3 \frac{72}{18} = 12$$

In generale, al di là di quello studiato nell'ultimo esercizio, che può essere considerato un caso particolare, le scelte del lavoratore variano al variare del salario. Vediamo quindi cosa succede alla domanda di reddito e tempo libero quando si modifica la retribuzione oraria. Supponiamo che la retribuzione oraria passi gradualmente da € 10 a € 12 e successivamente a € 14.

La prima domanda che dobbiamo porci è come variano le rette di bilancio in queste circostanze.

Evidentemente l'intercetta con l'asse delle ascisse non varia: la durata di un giorno non è influenzata dalla retribuzione oraria! L'intercetta con l'asse delle ordinate invece sale, prima a € 288 (24x12), poi a € 336 (24x14). Dato che la pendenza delle rette è data da w_o anche la pendenza in termini assoluti cresce.

La rappresentazione grafica è illustrata nella seguente figura

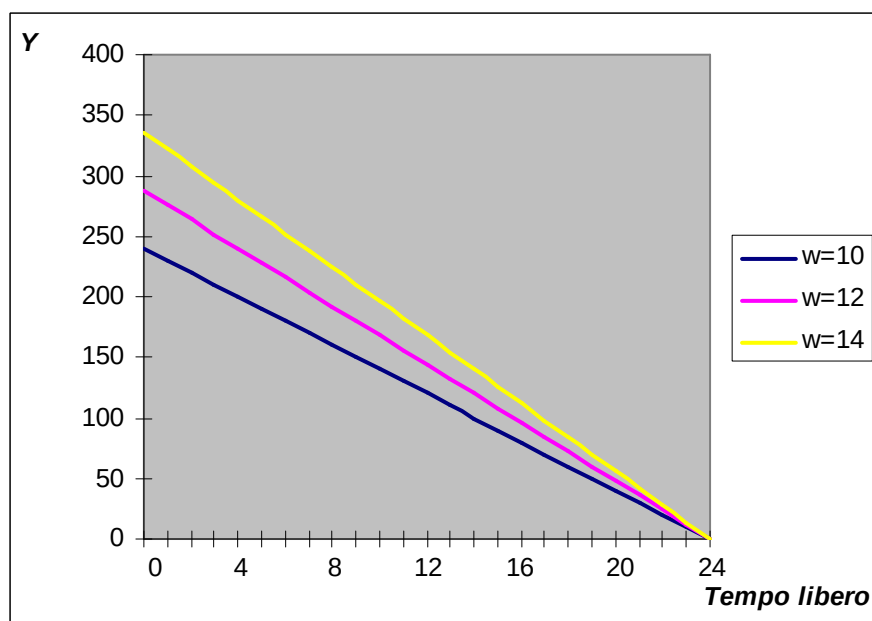


Figura A2.6.3

Quale sarà la scelta ottima del lavoratore in conseguenza di una crescita della retribuzione oraria. Il bene “tempo libero”, quando cresce la retribuzione oraria, diviene più caro, cioè il suo prezzo, in termini di rinuncia alla retribuzione oraria, cresce. Di conseguenza l’effetto sostituzione in questo caso deve essere negativo. Per converso il tempo libero è un bene normale e quindi, al crescere del reddito dei soggetti, tende ad essere consumato di più. L’effetto reddito è quindi in questo caso positivo e i due effetti vanno in direzione opposta rispetto alla domanda di tempo libero. Si faccia attenzione alla particolarità di questa situazione, molto differente da quella dei beni inferiori. In questo caso, diversamente dal solito, la crescita della retribuzione oraria ha un doppio effetto, per la natura particolare del problema: da una parte rende più costoso il tempo libero, ma dall’altra aumenta il reddito del lavoratore. Normalmente, invece, l’aumento di un prezzo ha l’effetto di ridurre il reddito reale del consumatore, oltre che di rendere più caro il bene in questione.

Nel caso che stiamo esaminando, dunque, l’effetto finale dipende da quale dei due effetti alla fine prevale: negli esempi numerici presentati sopra effetto reddito ed effetto sostituzione si compensano perfettamente, perché la domanda di tempo libero (e quindi l’offerta di lavoro) restano costanti al variare della retribuzione oraria. Tuttavia nella realtà può prevalere l’effetto sostituzione e la domanda di tempo libero diminuisce, e quindi la curva di offerta di lavoro (di ore lavoro) del lavoratore è inclinata positivamente al variare della retribuzione oraria. Tuttavia si può verificare anche il caso in cui prevale l’effetto reddito, per cui al crescere della retribuzione oraria il lavoratore chiede più tempo libero, cioè, offre meno lavoro. In questo caso la curva di offerta di lavoro individuale ha un andamento paradossale, cioè diviene decrescente.

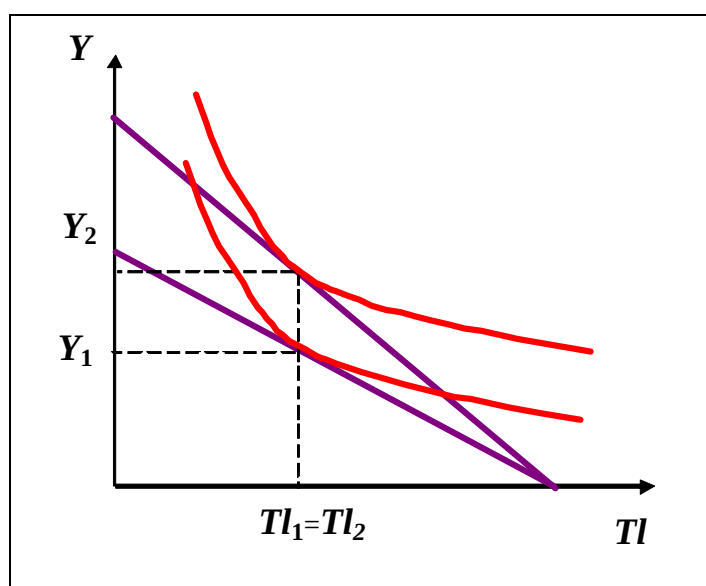


Figura A2.6.4

La figura A2.6.2.4 illustra il caso in cui effetto sostituzione ed effetto reddito si neutralizzano. La domanda di tempo libero e quindi l'offerta di lavoro, restano costanti in seguito all'aumento del saggio di salario orario, mentre il reddito effettivamente percepito per le ore lavorate aumenta.

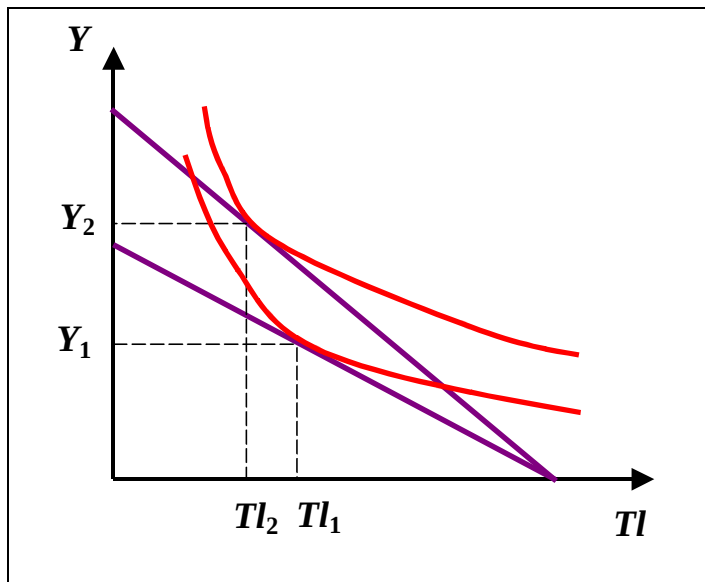


Figura A2.6.5

La figura A.2.6.5 raffigura il caso in cui l'effetto sostituzione supera l'effetto reddito. Al crescere della retribuzione oraria il tempo libero consumato diminuisce da Tl_1 a Tl_2 , mentre il reddito effettivo cresce da Y_1 a Y_2 . Conseguentemente l'offerta di lavoro cresce da $24 - Tl_1$ a $24 - Tl_2$.

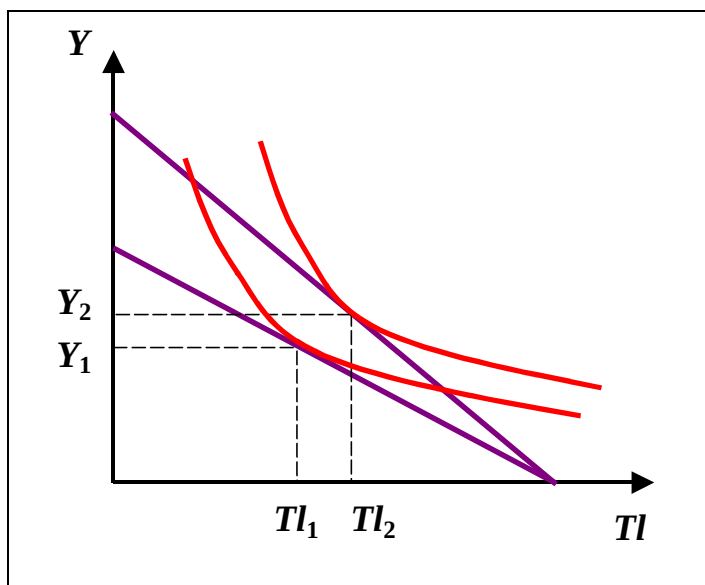


Figura A.2.6.6

Viceversa nella figura A.2.6.6 l'effetto reddito prevale sull'effetto sostituzione e la domanda di tempo libero cresce da Tl_1 a Tl_2 . Di conseguenza l'offerta di lavoro decresce, nonostante l'aumento della retribuzione, da $24 - Tl_1$ a $24 - Tl_2$. Si noti che in questo caso, nonostante la diminuzione delle

ore lavorate, il reddito effettivo cresce da Y_1 a Y_2 . Quindi la retribuzione oraria cresce più che proporzionalmente rispetto al consumo di tempo libero.

Da questa discussione possiamo concludere che lo stesso individuo può avere una curva dell'offerta di lavoro la cui pendenza può cambiare direzione, a seconda del livello iniziale della retribuzione oraria. Per livelli giudicati bassi di reddito, infatti, un incremento della retribuzione può avere un forte effetto sostituzione, causando un incremento dell'offerta di lavoro, mentre per livelli di reddito considerati soddisfacenti un ulteriore incremento della retribuzione può indurre a domandare più tempo libero, facendo prevalere l'effetto reddito e provocando una inversione della curva di offerta di lavoro come illustrato nella figura seguente.

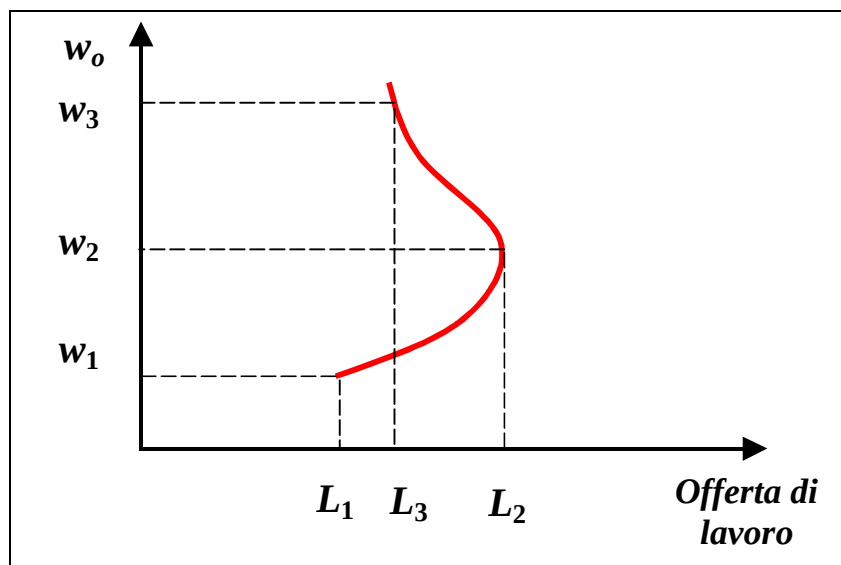


Figura A.2.6.7

Nella figura A.2.6.7, l'aumento del salario orario da w_1 a w_2 fa aumentare l'offerta di lavoro da L_1 a L_2 . Si tratta quindi nel caso illustrato dalla figura A2.6.5, in cui prevale l'effetto sostituzione. Con l'incremento del salario da w_2 a w_3 , viceversa, l'offerta di lavoro scende da L_2 a L_3 . Si tratta quindi del caso illustrato dalla figura A2.6.6, in cui prevale l'effetto reddito. Per variazioni molto piccole del salario w_2 , viceversa effetto reddito ed effetto sostituzione tendono ad annullarsi, e quindi siamo nella situazione illustrata dalla figura A2.6.4.

Approfondimento 7

Scelte intertemporali (di seguito).

Come sappiamo i consumatori non debbono necessariamente consumare tutto il reddito corrente nel periodo in cui lo ricevono, ma possono decidere di risparmiarne una parte, oppure possono consumare oggi più del loro reddito corrente, anticipando la spesa del reddito che riceveranno in

futuro, cioè indebitandosi. Dobbiamo perciò estendere il nostro modello di analisi per tenere conto di queste possibilità.

Come sempre semplificheremo il problema per poterlo studiare meglio. Prendiamo quindi in considerazione due soli periodi di tempo, in cui il consumatore deve decidere come distribuire il consumo del reddito complessivo. Sia R_1 il reddito ricevuto nel primo periodo e R_2 il reddito ricevuto nel secondo periodo. Il consumatore può decidere di risparmiare una parte del reddito nel primo periodo, per poter consumare di più nel secondo periodo. In questo caso non si limita a tenere la somma risparmiata inoperosa, ma la presta a un altro soggetto, che vuole invece utilizzarla nel primo periodo, ed in cambio riceve, alla scadenza del prestito un interesse i . Possiamo quindi comprendere che il valore futuro del reddito corrente è pari al reddito stesso aumentato del tasso di interesse. L'espressione valore futuro del reddito corrente significa che se oggi il consumatore ha a disposizione un reddito pari a R_1 e intende risparmiarlo interamente, nel secondo periodo avrà a disposizione una somma pari a $R_1(1+i)$, generata dal risparmio attuale. Il limite, cioè il consumo massimo che il consumatore può in teoria effettuare nel secondo periodo è quindi pari alla somma del reddito del secondo periodo più il reddito del primo periodo aumentato dell'interesse. Di conseguenza l'intercetta della retta di bilancio con l'asse delle ordinate, sul quale misuriamo C_2 (il consumo del secondo periodo), il consumo del secondo periodo è quindi $R_2 + R_1(1+i)$.

All'estremo opposto di tutte le possibili scelte intertemporali che il consumatore può effettuare c'è invece il caso in cui egli voglia effettuare tutto il consumo possibile nel primo periodo. In questo caso il consumatore deve prendere a prestito una somma che si impegna a restituire nel secondo periodo. Poiché al momento della restituzione deve pagare anche gli interessi sul prestito, il nostro soggetto non può anticipare per il consumo nel periodo corrente (C_2) un valore uguale al suo reddito futuro. Infatti, al massimo, può prendere a prestito nel primo periodo una somma VA che aumentata del tasso di interesse sia uguale al reddito del secondo periodo. Possiamo quindi scrivere $VA(1+i) = R_2$. Questo ci permette di comprendere il concetto di valore attuale di una ricchezza futura. Infatti possiamo scrivere, dall'equazione precedente, $VA = \frac{R_2}{1+i}$. Il valore attuale del reddito futuro è quindi minore del reddito stesso, poiché il tasso di interesse è positivo. Se voglio utilizzare oggi un valore che sono certo entrerà in mio possesso solo nel futuro, debbo scontarlo al tasso di interesse corrente. Il secondo limite alle possibilità di scelta del consumatore, il consumo massimo effettuabile nel primo periodo è quindi dato dalla somma del reddito corrente e del valore attuale del reddito del secondo periodo: $R_1 + \frac{R_2}{1+i}$, che rappresenta l'intercetta della retta di bilancio con l'asse delle ascisse.

Per quanto riguarda le possibili scelte intermedie, in cui il consumo viene diviso tra il primo e il secondo periodo, se il consumatore decide comunque di consumare nel primo periodo più del reddito corrente, dovrà prendere a prestito una somma qualsiasi $P < R_2$. Il suo consumo C_1 nel primo anno è quindi:

$$A.2.7.1) C_1 = R_1 + P$$

Il consumo del secondo periodo, però, sarà minore del reddito corrispondente, perché egli dovrà restituire il prestito più gli interessi, cioè la somma $P(1+i)$. Possiamo quindi scrivere:

$$A.2.7.2) C_2 = R_2 - P(1+i).$$

Se ricaviamo il valore di P nell'equazione A.2.7.1 ($P = C_1 - R_1$) e lo sostituiamo nell'equazione A.2.7.2 otteniamo questa equazione:

$$A.2.7.3) C_2 = R_1(1+i) + R_2 - C_1(1+i).$$

Questa è l'equazione della nostra retta di bilancio, in cui $R_1(1+i) + R_2$ è, come sappiamo, l'intercetta con l'asse delle ordinate e $(1+i)$ la pendenza (presa in termini assoluti) della retta. $1+i$ è interpretabile come rapporto tra i prezzi, in questo caso di una somma disponibile oggi, che vale $1+i$ volte la stessa somma disponibile nel futuro.

In secondo luogo l'equazione A.2.7.3) può essere scritta nel seguente modo

$$A.2.7.4) C_1(1+i) + C_2 = R_1(1+i) + R_2$$

Comunque il consumatore decida di distribuire il suo consumo tra i due periodi, dovrà rispettare il vincolo che il valore dell'intero reddito del primo e del secondo periodo sia uguale al valore dell'intero consumo. Poiché per rendere sommabili consumo e reddito del primo e del secondo periodo dobbiamo renderli omogenei, dobbiamo cioè calcolarne il valore rapportandoli ad un unico periodo, nella equazione A.2.7.4) tutti i valori sono rapportati al secondo periodo, cioè il reddito e il consumo del primo periodo sono calcolati al loro valore futuro. Evidentemente avremmo potuto calcolarli anche rapportandoli al primo periodo, considerando il valore attuale del consumo e del reddito del secondo periodo:

$$A.2.7.4.2) C_1 + \frac{C_2}{1+i} = R_1 + \frac{R_2}{1+i}$$

Lo stesso risultato si ottiene nell'ipotesi che il consumatore risparmi nel primo periodo per consumare di più nel secondo.

In questo caso il consumo del primo periodo sarà uguale al reddito meno la somma S risparmiata

$$A.2.7.5) C_1 = R_1 - S.$$

Mentre il consumo del secondo periodo sarà uguale al reddito corrispondente sommato al risparmio e ai relativi interessi:

$$A.2.7.6) C_2 = R_2 + S(1+i).$$

Anche in questo caso possiamo ricavare il valore di S nella equazione A.2.7.5) ($S=R_1-C_1$) e sostituire il risultato raggiunto nell'equazione A.2.7.6), per ottenere nuovamente l'equazione A.2.7.3).

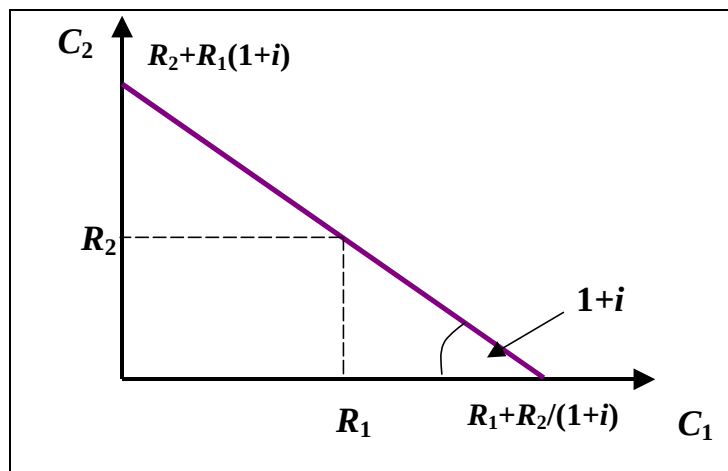


Figura A.2.7.1

La figura A.2.7.1 mostra la retta di bilancio intertemporale: come si nota l'intercetta sull'asse delle ordinate e quella sull'asse delle ascisse, così come la pendenza, sono quelle illustrate nella nostra discussione. Sulla retta abbiamo riportato la combinazione tra reddito del primo e reddito del secondo periodo. Questo punto è importante, perché rappresenta la “dotazione” iniziale che il consumatore ha per effettuare le sue scelte.

Che succede se dovesse mutare il tasso di interesse, cioè il rapporto tra prezzo del consumo futuro e prezzo del consumo presente?

Nel caso in cui il tasso di interesse aumenta, il consumatore che risparmia l'intero reddito del primo periodo si troverà in grado di consumare nel secondo periodo di più, perché otterrà un compenso maggiore per il suo risparmio. Di conseguenza l'intercetta sull'asse delle ordinate si sposterà verso l'alto. Viceversa il consumatore che prende a prestito e anticipa tutto il reddito del secondo periodo per il consumo nel primo periodo, si troverà a consumare di meno, perché diminuisce il valore attuale del reddito futuro. Di conseguenza l'intercetta sull'asse delle ascisse si sposta verso sinistra. Nel caso in cui il consumatore consumi sia nel primo che nel secondo periodo un valore equivalente ai rispettivi redditi, la sua posizione resterà immutata, dato che non domanda né offre prestiti e quindi non ottiene né paga interessi. Ne consegue che, in seguito ad un aumento del tasso di interesse la retta di bilancio ruota, assumendo una pendenza più alta, facendo perno sul punto corrispondente alla combinazione R_1-R_2 , come è mostrato nella figura A.2.6.2)

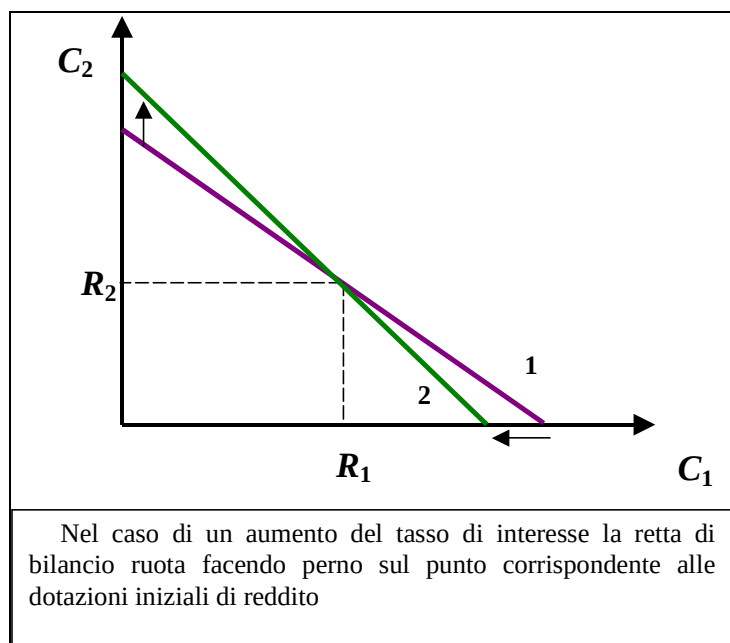
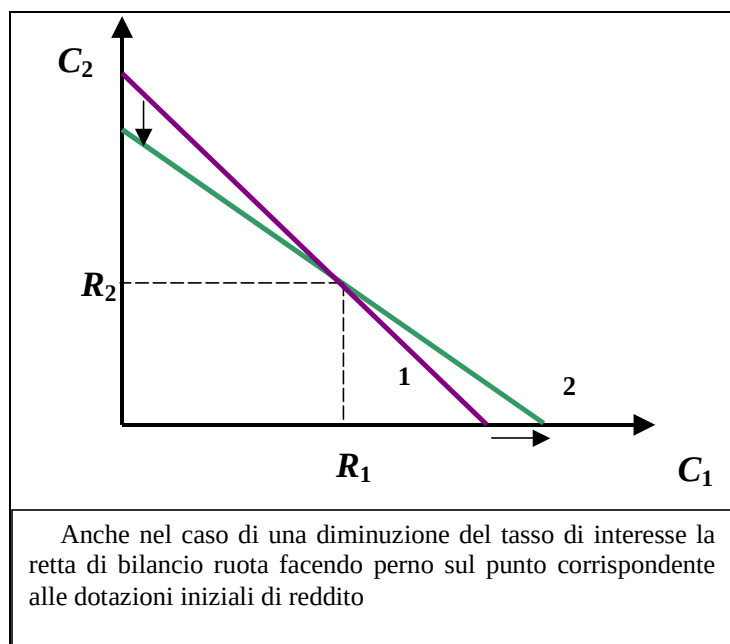


Figura A.2.7.2

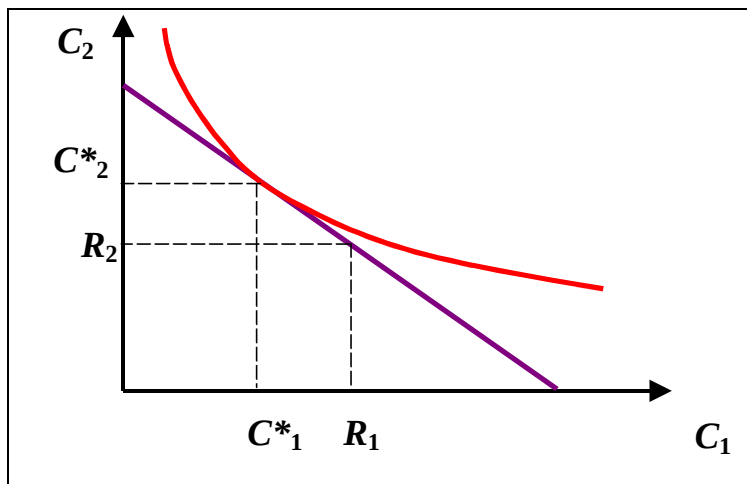
Ovviamente il caso opposto avviene quando il tasso di interesse diminuisce.



A.2.7.3

Per quanto riguarda la scelta del consumatore, basta a questo punto rappresentare le sue preferenze intertemporali con le consuete curve di indifferenza, che rappresentano tutte le combinazioni tra consumo del primo e consumo del secondo che danno lo stesso livello di utilità. La forma delle curve è quella consueta. In particolare possiamo soffermarci un momento sul saggio marginale di sostituzione. Questo saggio rappresenta ora quanto il consumatore è disposto a cedere di consumo futuro in cambio di un'unità in più di consumo presente. Se ad esempio in un punto della curva il saggio marginale di sostituzione è pari a 1,2, il consumatore è disposto a rinunciare a

1,2 unità di consumo futuro in cambio di un'unità aggiuntiva di consumo corrente. Il consumo corrente vale 1,2 volte il consumo futuro. Il saggio marginale di sostituzione ci permette di misurare la preferenza del consumo corrente rispetto al consumo futuro, cioè il *saggio di preferenza intertemporale* del soggetto, che nel nostro esempio è del 20%. In generale il saggio di preferenza intertemporale è positivo, cioè valutiamo di più il consumo presente rispetto al consumo futuro, perché sentiamo con maggiore urgenza i bisogni attuali. Come dice anche il proverbio, “meglio un uovo oggi che una gallina domani”. Inoltre il saggio marginale di sostituzione tende a diminuire mano a mano che ci spostiamo verso destra perché, aumentando il consumo presente, si attribuisce minor peso ad una sua diminuzione di un'unità. Di conseguenza siamo disposti a rinunciare in cambio di un'unità aggiuntiva di consumo corrente, ad una quantità di consumo futuro minore rispetto al caso in cui il consumo corrente sia più basso.



A.2.7.4

La figura A.2.7.4 rappresenta un possibile equilibrio del consumatore, ottenuto come di consueto eguagliando il Saggio Marginale di Sostituzione al rapporto tra i prezzi (in questo caso $1+i$), cioè trovando il punto di tangenza tra la retta di bilancio e la curva di indifferenza. Si noti che in questo caso il consumatore risparmia nel primo periodo per consumare di più nel secondo ($C_1 < R_1$ e $C_2 > R_2$). Il risparmio è esattamente uguale a $R_1 - C_1$. Se, come nella figura A.2.7.5, il punto di tangenza si fosse realizzato verso il basso, il consumatore avrebbe scelto di consumare di più nel periodo corrente e meno in quello futuro, indebitandosi ($C_1 > R_1$ e $C_2 < R_2$). Il prestito è uguale a $\frac{R_2 - C_2}{1+i}$.

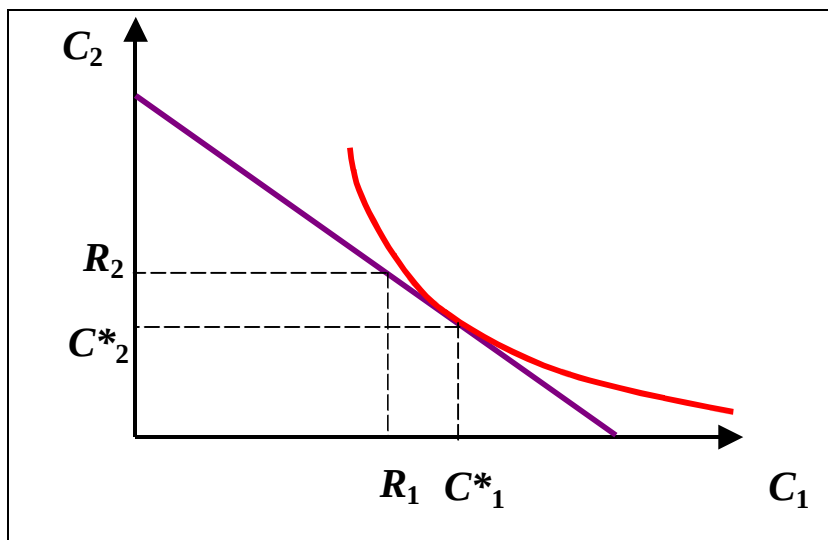


Figura A.2.7.5

Un punto notevole, in questa analisi, sono le conseguenze di un mutamento del tasso di interesse. Supponiamo che il tasso di interesse cresca. Come abbiamo visto la retta di bilancio ruota verso l'alto, assumendo una pendenza più alta, facendo perno sul punto le cui coordinate sono date rispettivamente dal reddito corrente e dal reddito futuro (R_1, R_2).

Nel caso in cui il consumatore prende a prestito, cioè consuma di più, rispetto al reddito, nel periodo corrente, non si pongono particolari problemi. Il consumo corrente diviene più caro in rapporto al consumo futuro, perché prendere a prestito ha un costo maggiore in termini di interessi da pagare. Quindi dobbiamo aspettarci un effetto sostituzione negativo. Ma anche l'effetto reddito è negativo in questo caso perché il valore attuale del reddito futuro diminuisce in seguito all'aumento del tasso di interesse. Il consumatore prende a prestito e quindi è diventato un po' più povero, dovendo pagare più interessi. Di conseguenza il consumatore è indotto a diminuire il suo debito e quindi ad aumentare il consumo futuro, diminuendo il consumo corrente.

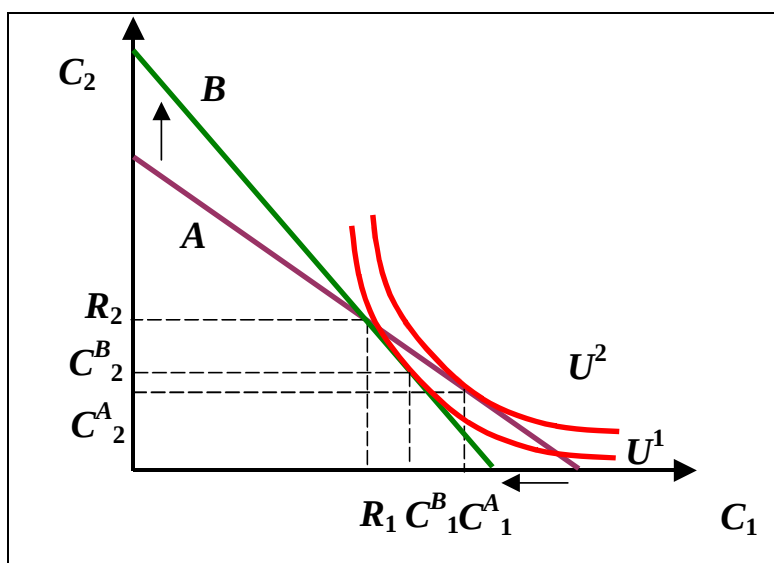


Figura A.2.7.6

Nella figura A.2.7.6 è mostrato quanto abbiamo detto finora: la retta di bilancio, in seguito ad un aumento del tasso di interesse, ruota da **A** a **B**. Il consumatore passa dalla curva di indifferenza U^2 ad una curva più bassa U^1 , e diminuisce il consumo presente da C_1^A a C_1^B . Il consumo futuro aumenta da C_2^A a C_2^B .

Più complessa è la situazione quando il consumatore risparmia. Per quanto riguarda il consumo futuro non si pongono problemi: ricevendo un interesse più alto tanto l'effetto sostituzione che l'effetto reddito sono positivi e il consumo futuro cresce. Ma che succede al consumo presente? L'effetto sostituzione è negativo, perché, come abbiamo visto, il prezzo del consumo presente è cresciuto rispetto al consumo futuro, mentre l'effetto reddito è positivo, perché il consumatore, ricevendo interessi dal suo risparmio, è diventato più ricco. Quindi la variazione del consumo presente è indeterminata, perché quando prevale l'effetto sostituzione il consumo presente diminuisce, mentre quando prevale l'effetto reddito il consumo presente aumenta.

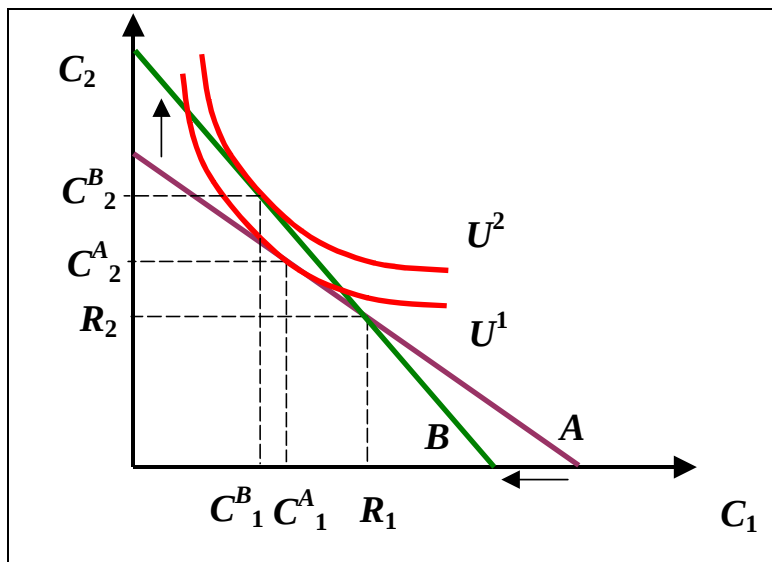


Figura A.2.7.7

Nella figura A.2.7.7 è mostrato il caso in cui prevale l'effetto sostituzione sull'effetto reddito per quanto riguarda il consumo presente. Infatti si verifica una diminuzione da C_1^A a C_1^B . Come dovevamo aspettarci, invece, il consumo futuro aumenta da C_2^A a C_2^B . Ovviamente in questo caso il consumatore è in grado di raggiungere una curva di indifferenza più alta, cioè il suo benessere aumenta.

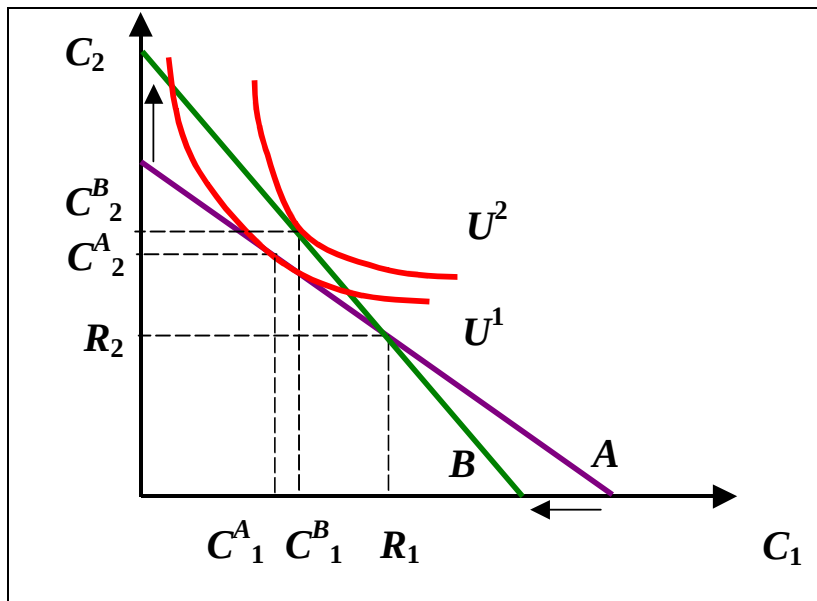


Figura A.2.7.8

Nel caso della figura A.2.7.8, invece, l'effetto reddito a prevalso sull'effetto sostituzione e il consumo presente è cresciuto da C_1^A a C_1^B . Il consumo futuro aumenta anche in questo caso, sia pure meno che in quello precedente. Il suo incremento in questo caso è finanziato unicamente dall'incremento del tasso di interesse e non dall'incremento del risparmio, che anzi è diminuito.

Si può dire che, così come l'offerta di lavoro, anche la curva individuale di offerta di risparmio può avere una inversione di pendenza. Nei casi in cui l'effetto reddito prevale sull'effetto sostituzione per quanto riguarda il consumo presente, questo ultimo aumenta, cioè diminuisce il risparmio, che non è altro che la differenza tra reddito e consumo correnti. La pendenza diviene negativa, mentre resta normale, cioè positiva, quando l'effetto sostituzione prevale sull'effetto reddito.

Esercizio

Un consumatore ha la seguente funzione di utilità riferita a due periodi: $U = C_1^{\frac{3}{5}} C_2^{\frac{2}{5}}$. Il suo reddito del periodo corrente è $R_1 = € 1050$ e il reddito previsto per il prossimo periodo è $R_2 = € 675$. Sapendo che il tasso di interesse che il consumatore può ottenere da un credito o pagare per un debito è $i=0,5$, quali saranno le sue scelte di consumo presente e consumo futuro per i due periodi?

Il valore futuro del suo reddito totale (cioè l'intercetta con l'asse delle ordinate della retta di bilancio) è $RT = 1050(1+i) + 675 = 2250$.

Questo valore deve essere diviso tra il presente e il futuro in modo ottimale.

Ancora una volta è possibile ricorrere, per risolvere il problema, alle equazioni 14.1) e 14.2), ricordando che il prezzo che esprime il valore futuro del consumo presente è $1+i$, mentre il prezzo del valore futuro del consumo futuro è evidentemente 1:

$$C_1 = \frac{RT\alpha}{1+i} = \frac{2250 * \frac{3}{5}}{1,5} = \frac{1350}{1,5} = 900$$

D'altra parte il consumo futuro ottimo è

$$C_2 = \frac{RT\beta}{1} = 2250 * \frac{2}{5} = 900$$

Il consumatore risparmia nel periodo presente $1050 - 900 = \text{€ } 150$. Nel periodo futuro ha a disposizione $150 * 1,5 = \text{€ } 225$, che sommate al reddito di 675 gli permettono di effettuare consumi per € 900.

Infatti il SMS, nel punto indicato è dato da $(\frac{3}{5} / \frac{2}{5}) * \frac{C_2}{C_1} = (\frac{3}{5} / \frac{2}{5}) * \frac{900}{900} = 1,5$ che equivale a $1+i$.

Approfondimento 8.

Un caso particolare di curve di indifferenza: i beni complementari perfetti (di seguito)

Un caso particolare nella costruzione delle curve di indifferenza è quello dei beni complementari perfetti. Questi beni sono sempre consumati congiuntamente in una certa proporzione. Facciamo un esempio: gli sci e gli attacchi. E' ragionevole presumere che un paio di sci senza attacchi o un paio di attacchi senza sci siano inservibili, non abbiano quindi alcuna utilità. Ciò ha come conseguenza una forma particolare delle curve di indifferenza: se infatti uno sciatore ha a sua disposizione, in un particolare periodo di tempo, 2 paia di sci e due paia attacchi, il suo livello di soddisfazione rimane lo stesso anche quando aumenta la quantità di attacchi, ferma restando quella degli sci: se ad esempio possiede 2 paia di sci e tre, quattro, cinque ecc. paia di attacchi resta sulla stessa curva di indifferenza, perché il maggior numero di attacchi non aumenta le sue possibilità di consumo. La stessa cosa vale se aumenta il numero di sci, fermi restando gli attacchi.

Da queste considerazioni deriva la particolare forma delle curve di indifferenza, che avranno un angolo nel punto corrispondente alla proporzione con cui sono consumati congiuntamente i due beni (nel nostro caso la proporzione è 1 a 1 e nell'esempio le coordinate sono contrassegnate da 2 paia di attacchi e due paia di sci) due braccia parallele agli assi quando aumenta un bene oltre la proporzione consumabile.

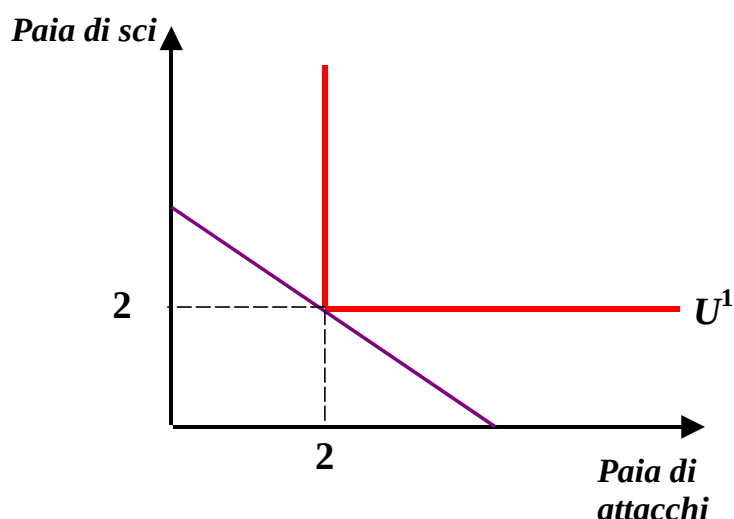


Figura A.2.8.1

Nella figura A.2.8.1 è mostrata la forma della curva di indifferenza, tipicamente ad angolo retto. Si noti che il punto di massimo, dato dalla tangenza della curva di indifferenza con la retta di bilancio, avviene nel punto di angolo. E' evidente infatti che il consumatore ha sempre convenienza ad acquistare i beni nella giusta proporzione in cui debbono essere consumati. Ciò ha come conseguenza che un eventuale mutamento di prezzo di uno dei due beni muterà il consumo solo per l'effetto reddito e non per l'effetto sostituzione. Se ad esempio dovesse diminuire il prezzo degli attacchi, il consumatore sarà spinto a consumare una quantità maggiore di entrambi i beni nella stessa proporzione, per effetto del suo maggiore potere d'acquisto, mentre non avrebbe senso consumare più attacchi e meno sci, cioè sostituire il consumo di un bene a quello di un altro.

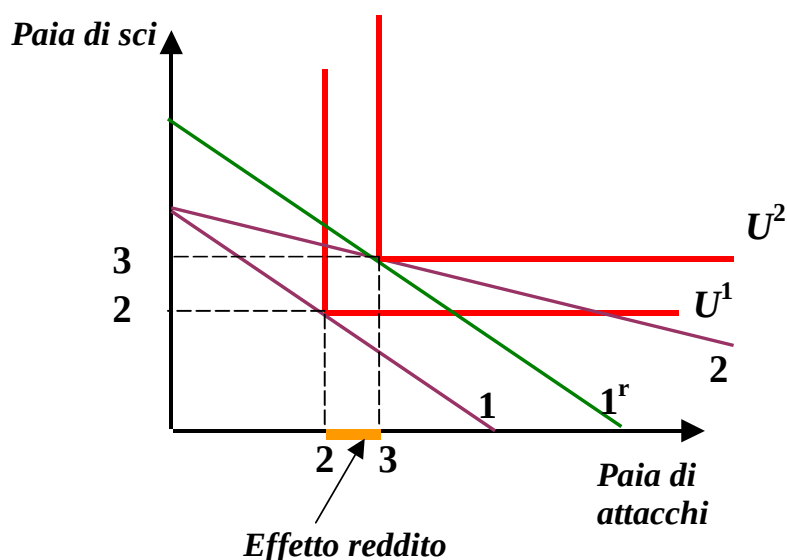


Figura A.2.8.2

Nella figura A.2.8.2 sono mostrate le conseguenze di una diminuzione del prezzo degli attacchi. Il consumatore è spinto ad aumentare nella stessa proporzione il consumo di sci e di attacchi,

passando dal consumo di due al consumo di tre paia per entrambi e situandosi nella curva di indifferenza più alta U^2 . Se invece di diminuire il prezzo degli attacchi fosse aumentato il reddito del consumatore fino a permettergli di raggiungere ugualmente la curva di indifferenza U^2 , la retta di bilancio sarebbe divenuta la 1^r , ma come si vede, il paniere scelto sarebbe stato comunque lo stesso, il che mostra che l'effetto sostituzione è nullo.